

# **Projeto da Suspensão Estudo do Equilíbrio Dinâmico de uma Viatura Fórmula**

*André Sousa Figueiredo do Couto*

**Dissertação do MIEM**

Orientador na FEUP: Prof. José Ferreira Duarte



**Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto**  
**Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica**

Julho 2013

*À minha família, namorada e amigos por todo o apoio*

## Resumo

No âmbito da unidade curricular de dissertação do Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica – opção de produção, desenvolvimento e engenharia automóvel – da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP), foi realizado o presente trabalho cujo objetivo é a criação de um software que simule o comportamento dinâmico de um veículo automóvel baseado no modelo matemático criado para o efeito.

Este modelo matemático é constituído pelas equações de movimento que dizem respeito aos corpos móveis e que são determinantes para o comportamento dinâmico de um veículo automóvel, em particular um monolugar.

Para a criação do modelo matemático final utilizou-se um método evolutivo, começando com um modelo mais simples, modelo de quarto de carro, passando para a carroçaria e posteriormente analisando a transferência de massa lateral e longitudinal.

O modelo matemático final assim obtido inclui sete graus de liberdade:

- Movimento vertical de cada uma das 4 rodas;
- Movimento vertical da carroçaria;
- Movimento de rotação lateral da carroçaria (*roll*);
- Movimento de rotação longitudinal da carroçaria (*pitch*).

Definido o modelo matemático, este foi implementado numa ferramenta de simulação do MATLAB®, denominada por Simulink®. Com o Simulink® é possível dividir o modelo matemático em vários blocos, permitindo que este fique mais perceptível. Para além desta vantagem, permite modificar os parâmetros e observar imediatamente os resultados obtidos nas simulações.

Este modelo matemático é válido para qualquer veículo automóvel. No entanto, para testar o modelo implementado em Simulink® foi feita uma recolha dos dados do Fórmula Glória B4 disponibilizado pela FEUP.

Assim, com o modelo matemático concebido e com estes valores é possível prever o comportamento do monolugar em pista; ou seja, quando existe transferência de massa lateral, longitudinal ou a conjugação das duas. Com a criação deste software foi possível simular o modelo matemático, e assim analisar a influência de cada variável no comportamento do carro, para que este possa ter a melhor afinação possível para cada prova.

## Suspension Project Study of Dynamic Equilibrium of a Formula Car

### Abstract

Within the curricular unit of the Mechanical Engineering Masters dissertation - option of production, development and automotive engineering – of the Engineering Faculty of Porto University (FEUP), was carried out the present work whose objective is to create a software that simulates the dynamic behavior of a vehicle based on the mathematical model created for this purpose.

This mathematical model is constituted by the equations of motion that concern to moving bodies and which are decisive for the dynamic behavior of a vehicle, in particular a single seater.

To create the final mathematical model it was used an evolutionary method, starting with a simple model, a model of a quarter of a car, passing to the car body and subsequently analyzing the lateral and longitudinal mass transfer.

The final mathematical model thus obtained includes seven degrees of freedom:

- Vertical movement of each one of the 4 wheels;;
- Vertical movement of the car body;
- Lateral rotation of the car body (*roll*);
- Longitudinal rotation of the car body (*pitch*).

Completed the mathematical model, this has been implemented in a simulation tool of the MATLAB<sup>®</sup> software, denominated Simulink<sup>®</sup>. With Simulink<sup>®</sup> it is possible to divide the mathematical model into several blocks, allowing it to become more perceptible. In addition to this advantage, it allows you to modify the parameters and immediately observe the results obtained in the simulations.

This mathematical model is valid for any vehicle. However, to test the model implemented in Simulink<sup>®</sup>, the data were collected from the “Fórmula Glória B4” made available by FEUP.

Therefore, with the developed mathematical model and these values it is possible to predict the behavior of a single seater on track; in other words, when there is a lateral or a longitudinal mass transfer or combination of both. With the creation of this software it was possible to simulate the mathematical model, and thus to analyze the influence of each variable on the behavior of the car, so that it can have the best set up possible for each race.

### **Agradecimentos**

Agradeço ao Eng.º José Ferreira Duarte pela orientação e disponibilidade ao longo do semestre.

Ao João Pinho e ao Nicolas Venâncio que foram meus parceiros ao longo deste projeto.

Ao departamento de vibrações pelos conselhos e esclarecimentos dados sempre que deles necessitei.

A todos os membros das oficinas da faculdade por todo o apoio dado; sem eles seria impensável fazer os testes práticos necessários ao enriquecimento do meu trabalho.

À Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto que me disponibilizou as suas instalações para a concretização deste projeto.

À minha namorada e amigos pelo apoio prestado ao longo do curso.

À minha família por estarem sempre presentes e serem um apoio incondicional com que pude e posso sempre contar.

## Índice

<b>1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>17</b>
1.1	Enquadramento geral .....	17
1.2	Objectivo trabalho .....	18
1.3	Elaboração do trabalho .....	18
<b>2</b>	<b>Dinâmica de um Veículo Automóvel.....</b>	<b>20</b>
2.1	Suspensão .....	20
2.1.1	Elemento armazenador de energia cinética .....	21
2.1.2	Elemento de dissipação de energia.....	21
2.1.3	Elemento elástico.....	24
2.1.4	Barras estabilizadoras .....	24
2.2	Centro de gravidade.....	26
2.3	Centro e eixo de rolamento.....	28
2.4	Transferência de massa.....	31
2.4.1	Lateral .....	31
2.4.2	Longitudinal .....	32
2.5	Momentos de inércia .....	33
2.6	<i>Downforce</i> .....	34
2.7	Aerodinâmica.....	35
2.8	Pneus.....	37
2.8.1	Camber .....	37
2.8.2	Força lateral e longitudinal .....	38
2.8.3	Escorregamento .....	39
2.8.4	Pressão e temperatura .....	43
<b>3</b>	<b>Modelo Matemático .....</b>	<b>45</b>
3.1	Equilíbrio estático.....	47
3.2	Transferências de massa laterais.....	51
3.3	Transferências de massa longitudinal.....	55
3.4	Modelo matemático final.....	59
<b>4</b>	<b>Software MATLAB® - Simulink® .....</b>	<b>63</b>
4.1	Simbologia utilizada.....	64
4.2	Implementação do modelo.....	65
4.3	Configuração do programa .....	77
<b>5</b>	<b>Obtenção de Valores do Fórmula Glória B4.....</b>	<b>84</b>
5.1	Constante de rigidez das molas da suspensão .....	84

5.2	Constante de rigidez torsional das barras estabilizadoras .....	85
5.3	Constante de rigidez dos pneus .....	86
5.3.1	Variação da rigidez com a largura dos pneus .....	88
5.3.2	Variação da rigidez dos pneus com a pressão .....	91
5.3.3	Variação da rigidez dos pneus com a temperatura .....	94
5.3.4	Valores de rigidez dos pneus a utilizar nas simulações .....	97
5.4	Centro de gravidade .....	98
5.5	Constante de amortecimento da suspensão .....	101
5.6	Constante de amortecimento dos pneus .....	104
5.7	Momentos de inércia .....	105
5.8	<i>Downforce</i> .....	106
<b>6</b>	<b>Simulações .....</b>	<b>107</b>
6.1	Equilíbrio estático .....	110
6.2	Valores de referência - Sem acelerações com downforce igual a 2 .....	112
6.3	Comportamento em curva .....	115
6.3.1	Aceleração longitudinal (travagem) .....	116
6.3.2	Aceleração lateral e longitudinal (entrada em curva) .....	118
6.3.3	Aceleração lateral .....	120
6.3.4	Aceleração lateral e longitudinal (saída de curva) .....	122
6.3.5	Aceleração longitudinal (aceleração) .....	124
6.4	Influência da rigidez da suspensão .....	126
6.4.1	Rigidez da suspensão da frente .....	126
6.4.2	Rigidez da suspensão de trás .....	127
6.4.3	Rigidez da suspensão .....	128
6.5	Influência da pressão dos pneus .....	130
6.6	Influência do amortecimento .....	133
6.7	Influência da <i>downforce</i> .....	135
<b>7</b>	<b>Notas Finais .....</b>	<b>137</b>
<b>8</b>	<b>Trabalhos Futuros .....</b>	<b>139</b>
<b>9</b>	<b>Referências e Bibliografia .....</b>	<b>140</b>
	<b>ANEXO A: Resultados de Ensaios para Determinação da Rigidez dos Pneus .....</b>	<b>141</b>
	<b>ANEXO B: Influência do Amortecimento .....</b>	<b>155</b>

## Índice de figuras

Figura 1 - Fórmula Glória B4. (Gloriacars).....	17
Figura 2 - Fórmula Glória B4 disponibilizado para estudo. ....	18
Figura 3 - Diagrama de corpo livre, gráfico e equação do elemento de massa ou inércia, respetivamente. (Rodrigues 2012) .....	21
Figura 4 - Diagrama de corpo livre, gráfico e equação do elemento amortecedor, respetivamente. (Rodrigues 2012) .....	21
Figura 5 - Resposta livre ou natural do sistema para várias razões de amortecimento. (Rodrigues 2012) .....	23
Figura 6 - Resposta livre ou natural do sistema criticamente amortecido $\xi = 1$ . (Rodrigues 2012) .....	23
Figura 7 - Diagrama de corpo livre, gráfico e equação do elemento mola, respetivamente. (Rodrigues 2012) .....	24
Figura 8 - Barra estabilizadora. (Campbell 1981) .....	24
Figura 9 - Subviragem (em cima) e sobreviragem (em baixo). (Puhn 1976).....	25
Figura 10 – Rigidez torsional de uma barra estabilizadora. (Puhn 1976) .....	26
Figura 11 - Vista vertical do carro e fórmula para cálculo CG no plano horizontal. (Puhn 1976) .....	27
Figura 12 - Vista lateral do carro e fórmula para cálculo da altura do CG. (Puhn 1976).....	27
Figura 13 - Roll center com braços de suspensão com ângulos positivos e negativos, respetivamente. (D.Gillespie 1992) .....	28
Figura 14 - Roll center com braços de suspensão paralelos. (D.Gillespie 1992).....	29
Figura 15 - Eixo de rolamento. (Milliken e Milliken 1995).....	30
Figura 16 - Massa suspensa com indicação do eixo de rolamento. (Milliken e Milliken 1995) .....	30
Figura 17 - Transferência de massa lateral. (Milliken e Milliken 1995).....	31
Figura 18 - Transferência de massa longitudinal. (Milliken e Milliken 1995).....	32
Figura 19 - Percentagens <i>downforce</i> num monolugar com difusor. (Formula1-dictionary) .....	34
Figura 20 - Amortecedores monolugar antigo (esq.) e mais recente (dir.). (Campbell 1981; Wright 2001).....	35
Figura 21 - Coeficiente de arrasto para diferentes formas. (D.Gillespie 1992).....	35
Figura 22 – Coeficiente de arrasto para diferentes formas em função do número de Reynolds. (Munson, Young, e Okiishi 1998) .....	36
Figura 23 - Forma dos braços de suspensão do Fórmula Glória B4 disponibilizado para estudo. ....	36



Figura 24 - Camber positivo e negativo. (Puhn 1976) .....	37
Figura 25 - Variação do coeficiente de atrito em função do ângulo de camber. (Smith 1978) .....	38
Figura 26 - Vetor de força resultante durante uma curva. (Smith 1978).....	38
Figura 27 - Deformação nas paredes verticais. (Milliken e Milliken 1995) .....	39
Figura 28 - Deformação na zona de contato com o solo. (D.Gillespie 1992) .....	39
Figura 29 - Relação entre força lateral e slip angle e respetivas fases. (Milliken e Milliken 1995) .....	40
Figura 30 - Relação entre a força lateral e o <i>slip angle</i> para várias cargas verticais. (Milliken e Milliken 1995).....	41
Figura 31- Relação entre o coeficiente de força lateral e o slip angle para várias cargas verticais. (Milliken e Milliken 1995) .....	42
Figura 32 - Força normalizada na aceleração (esquerda) e na travagem (direita). (Milliken e Milliken 1995).....	42
Figura 33 - Aderência do pneu em função da pressão. (Puhn 1976).....	43
Figura 34 – Exemplo de aderência dum pneu em função da temperatura. (Puhn 1976) 44	
Figura 35 - Modelo de quarto de carro. (Milliken e Milliken 1995) .....	46
Figura 36 - Diagrama do corpo livre em equilíbrio estático da massa não suspensa da frente do lado esquerdo – roda 1. ....	47
Figura 37 - Diagrama do corpo livre em equilíbrio estático da massa suspensa.....	48
Figura 38 - Diagrama do corpo livre com transferência de massa lateral (vista frontal). ....	51
Figura 39 - Diagrama do corpo livre com transferência de massa longitudinal (vista lado esquerdo). ....	55
Figura 40 - Subsistema força da mola da roda 1 - $F_{k1}$ .....	66
Figura 41 - Subsistema força de amortecimento da roda 1 - $F_{c1}$ .....	66
Figura 42 - Subsistema força de rigidez do pneu da roda 1 - $F_{kp1}$ .....	67
Figura 43 - Subsistema força de amortecimento do pneu da roda 1 - $F_{cp1}$ .....	67
Figura 44 - Subsistema movimento vertical roda 1 .....	68
Figura 45 - Subsistema movimento vertical da massa suspensa total .....	69
Figura 46 - Percentagens admitidas de <i>downforce</i> num monolugar sem difusor. ....	70
Figura 47 - Cálculo da massa suspensa total. ....	70
Figura 48 - Subsistema força devido ao <i>downforce</i> na asa dianteira - $FD_d$ . ....	71
Figura 49 - Subsistema força devido ao <i>downforce</i> na asa traseira - $FD_t$ . ....	71
Figura 50 - Subsistema força devido ao <i>downforce</i> no corpo - $FD_c$ . ....	71

Figura 51 - Subsistema relativo à transferência de massa lateral. ....	73
Figura 52 - Subsistema referente ao momento devido à barra estabilizadora dianteira. ....	73
Figura 53 - Subsistema referente ao momento devido à barra estabilizadora traseira. ..	74
Figura 54 - Subsistema com momentos de inércia lateral e longitudinal. ....	74
Figura 55 - Subsistema referente ao momento de <i>roll</i> . ....	75
Figura 56 - Subsistema relativo à transferência de massa longitudinal. ....	76
Figura 57 - Subsistema referente ao momento de <i>pitch</i> . ....	76
Figura 58 - Blocos principais do programa, separando a introdução de valores (esq.) do modelo (dir.). ....	78
Figura 59 - Valores da rigidez da suspensão. ....	79
Figura 60 - Subsistema "Valores" ....	79
Figura 61 - Subsistema "Valores" - rigidez e amortecimento. ....	80
Figura 62 - Subsistema "Valores" - massas e medidas. ....	81
Figura 63 - Subsistema "Valores" - acelerações, momentos de inércia e <i>downforce</i> . ....	82
Figura 64 - Subsistema "Programa" ....	83
Figura 65 - Molas para o Fórmula Glória B4. (ManualGloria) ....	84
Figura 66 - Máquina de compressão Tinius Olsen. ....	86
Figura 67 - Mostrador da máquina de compressão Tinius Olsen. ....	86
Figura 68 - Medidor de deslocamento utilizado na máquina de compressão. ....	87
Figura 69 - Rigidez do pneu de chuva frente. ....	88
Figura 70 - Rigidez do pneu de chuva trás. ....	89
Figura 71 - Gráfico que relaciona a largura dos pneus de chuva a 35 psi. ....	89
Figura 72 - Rigidez dos pneus de chuva da frente com 30 psi. ....	91
Figura 73 - Rigidez dos pneus de chuva da frente com 35 psi. ....	92
Figura 74 - Rigidez dos pneus de chuva da frente com 40 psi. ....	92
Figura 75 - Gráfico que relaciona a pressão dos pneus de chuva para a frente. ....	93
Figura 76 - Rigidez do pneu slick frente à temperatura ambiente. ....	94
Figura 77 - Rigidez do pneu slick a 90°C. ....	95
Figura 78 - Gráfico que relaciona diferentes temperaturas para pneus slick frente. ....	95
Figura 79 - Pesagem do Fórmula Glória B4 disponível para estudo com piloto. ....	98
Figura 80 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso estático. ....	110
Figura 81 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso estático. ....	110
Figura 82 - Gráfico com os ângulos para o caso estático. ....	111

Figura 83 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso de referência ( <i>downforce</i> igual a 2 G). .....	112
Figura 84 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso de referência ( <i>downforce</i> igual a 2 G).....	112
Figura 85 - Gráfico com os ângulos para o caso de referência ( <i>downforce</i> igual a 2 G). .....	113
Figura 86 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso de travagem. ....	116
Figura 87 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso de travagem. ....	116
Figura 88 - Gráfico com os ângulos para o caso de travagem.....	117
Figura 89 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso de entrada em curva. ....	118
Figura 90 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso de entrada em curva. ....	118
Figura 91 - Gráfico com os ângulos para o caso de entrada em curva. ....	119
Figura 92 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso em que apenas existe aceleração lateral.....	120
Figura 93 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso em que apenas existe aceleração lateral.....	120
Figura 94 - Gráfico com os ângulos para o caso em que apenas existe aceleração lateral. ....	121
Figura 95 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso de saída de curva. ....	122
Figura 96 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso de saída de curva. ....	122
Figura 97 - Gráfico com os ângulos para o caso de saída de curva.....	123
Figura 98 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso de aceleração. ....	124
Figura 99 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso de aceleração. ....	124
Figura 100 - Gráfico com os ângulos o caso de aceleração.....	125
Figura 101 - Gráfico com os ângulos para as molas brancas na suspensão da frente. .	126
Figura 102 - Gráfico com os ângulos para as molas amarelas na suspensão da frente. ....	127
Figura 103 - Gráfico com os ângulos para as molas brancas na suspensão de trás.....	127
Figura 104 - Gráfico com os ângulos para as molas amarelas na suspensão de trás....	128
Figura 105 - Gráfico com os ângulos para as molas brancas em todas as suspensões. ....	128
Figura 106 - Gráfico com os ângulos para as molas amarelas em todas as suspensões. ....	129
Figura 107 - Gráfico com os valores para uma pressão nos pneus de 30 psi. ....	131
Figura 108 - Gráfico com os valores para uma pressão nos pneus de 40 psi. ....	131
Figura 109 - Gráfico com as forças das rodas da frente sem considerar o amortecimento dos pneus.....	133

Figura 110 - Gráfico com as forças das rodas da frente sem considerar o amortecimento das suspensões. ....	133
Figura 111 - Gráfico com as forças das rodas da frente sem considerar o amortecimento. ....	134
Figura 112 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso de saída de curva sem <i>downforce</i> . ....	135
Figura 113 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso de saída de curva sem <i>downforce</i> . ....	135
Figura 114 - Gráfico com os ângulos para o caso de saída de curva sem <i>downforce</i> . .	136

## Índice de tabelas

Tabela 1 - Blocos utilizados no Simulink®. (Simulink) .....	64
Tabela 2 - Constantes de rigidez possíveis para o Fórmula Glória B4. (ManualGloria) .....	84
Tabela 3 - Medidas do monolugar em estudo para o cálculo da rigidez torsional. ....	85
Tabela 4 - Valores obtidos para pneus de chuva a 35psi.....	88
Tabela 5 - Rigidez dos pneus de chuva a 35psi.....	90
Tabela 6 - Valores obtidos para pneus de chuva frente.....	91
Tabela 7 - Rigidez dos pneus de chuva para diferentes pressões. ....	93
Tabela 8 - Deslocamentos obtidos pneus de chuva frente com 40psi à temperatura ambiente e a 90°C. ....	94
Tabela 9 - Rigidez dos pneus de chuva a 40psi.....	96
Tabela 10 - Valores utilizados nos testes - pneus de chuva a 35 psi à temperatura ambiente.....	97
Tabela 11 - Massa distribuída no monolugar em estudo. ....	98
Tabela 12 - Medidas dos pneus. ....	99
Tabela 13 - Valores das distâncias entre eixos e de largura de eixos.....	99
Tabela 14 - Massa distribuída no Fórmula Glória B4 com uma elevação na frente de 452 mm. ....	100
Tabela 15 - Tabela resumo do centro de gravidade.....	101
Tabela 16 - Massa das rodas.....	102
Tabela 17 - Coeficientes de amortecimento da suspensão. ....	103
Tabela 18 - Coeficientes de amortecimento do pneu. ....	104
Tabela 19 - Valores utilizados para o cálculo dos momentos de inércia. (Gloriacars) .....	105
Tabela 20 - Valores dos momentos de inércia.....	105
Tabela 21 - Valores utilizados nas simulações.....	107
Tabela 22 - Valores obtidos para o caso estático.....	111
Tabela 23 - Valores obtidos para o caso de referência. ....	113
Tabela 24 - Valores obtidos para a travagem. ....	117
Tabela 25 - Valores obtidos para entrada em curva. ....	119
Tabela 26 - Valores obtidos para aceleração lateral. ....	121
Tabela 27 - Valores obtidos para saída de curva. ....	123
Tabela 28 - Valores obtidos para a aceleração. ....	125
Tabela 29 – Tabela resumo com variação do ângulo de pitch com variação da rigidez da suspensão. ....	129

Tabela 30 - Valores utilizados para os coeficientes de rigidez dos pneus a 30 psi. ....	130
Tabela 31 - Valores utilizados para os coeficientes de rigidez dos pneus a 40 psi. ....	130
Tabela 32 - Tabela resumo com a variação do ângulo de pitch com a pressão.....	132
Tabela 33 - Valores obtidas para a saída de curva sem <i>downforce</i> . ....	136

## Lista de símbolos

$a$	Distância centro gravidade ao eixo dianteiro	m
$a_f$	Distância do eixo dianteiro à asa frontal	m
$a_x$	Aceleração longitudinal	$m/s^2$
$a_y$	Aceleração lateral	$m/s^2$
$b$	Distância centro gravidade ao eixo traseiro	m
$b_t$	Distância do eixo traseiro à asa traseira	m
$c$	Coefficiente de amortecimento efetivo da suspensão	Ns/m
$c_c$	Amortecimento crítico	Ns/m
$c_p$	Coefficiente de amortecimento efetivo do pneu	Ns/m
$F_c$	Força do amortecedor da suspensão	N
$F_{cp}$	Força do amortecimento do pneu	N
$F_{Dc}$	<i>Downforce</i> do corpo	N
$F_{Dd}$	<i>Downforce</i> na asa dianteira	N
$F_{Dt}$	<i>Downforce</i> na asa traseira	N
$F_k$	Força da rigidez da suspensão	N
$F_{kp}$	Força da rigidez do pneu	N
$g$	Aceleração gravítica	$m/s^2$
$h_{cg}$	Altura do centro de gravidade	m
$I_x$	Momento de inércia longitudinal	$kgm^2$
$I_y$	Momento de inércia lateral	$kgm^2$
$k$	Constante de rigidez da suspensão	N/m
$k_p$	Constante de rigidez do pneu	N/m
$k_t$	Constante de rigidez torsional	Nm/rad

## Projeto da Suspensão Estudo do Equilíbrio Dinâmico de uma Viatura Fórmula

$L_{fd}$	Distância entre o eixo longitudinal e a roda dianteira direita	m
$L_{fe}$	Distância entre o eixo longitudinal e a roda dianteira esquerda	m
$L_{td}$	Distância entre o eixo longitudinal e a roda traseira direita	m
$L_{te}$	Distância entre o eixo longitudinal e a roda traseira esquerda	m
$m$	Massa	kg
$M_{\text{barra est}}$	Momento da barra estabilizadora	Nm/rad
$M_{\text{pitch}}$	Momento de rotação do carro segundo $\theta$	Nm
$M_{\text{roll}}$	Momento de rotação do carro segundo $\psi$	Nm
$P$	Peso	N
$Z$	Deslocamento vertical do corpo	m
$\dot{Z}$	Velocidade vertical do corpo	m/s
$\ddot{Z}$	Aceleração vertical do corpo	m/s <sup>2</sup>
$\theta$	Ângulo de <i>pitch</i>	rad
$\xi$	Razão de amortecimento	-
$\psi$	Ângulo de <i>roll</i>	rad
$\omega_n$	Frequência natural de vibração	rad/s



## 1 Introdução

Nesta dissertação do Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica (MIEM) da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP), foi feito um estudo sobre o equilíbrio dinâmico de um monolugar tendo como modelo um automóvel de competição disponibilizado para estudo – Fórmula Glória B4.

O equilíbrio dinâmico de um carro passa principalmente pelo dimensionamento da suspensão e consequentes afinações. Quanto mais optimizadas estas forem, melhor será o comportamento do veículo automóvel nas várias situações a que é submetido numa prova, nomeadamente, aceleração, travagem e comportamento em curva.

### 1.1 Enquadramento geral

No campo da competição automóvel em Portugal, a FEUP já deu os primeiros passos com a criação do troféu: “Desafio Único”.

Está a estudar a possibilidade da criação de uma nova categoria, fazendo uma ponte entre os *karts* e as corridas profissionais.

Para tal, foi pensado criar uma competição similar à Fórmula Glória, com uma engenharia simples, procurando simultaneamente maximizar a performance e manter os custos controlados (de criação, manutenção e custos em prova).

Desta forma, para otimizar as principais partes do Fórmula Glória B4 (Figura 1) foi destacada uma equipa constituída por 3 estudantes que têm como objetivos analisar e, eventualmente, otimizar o equilíbrio dinâmico, a aerodinâmica e o chassis do monolugar.

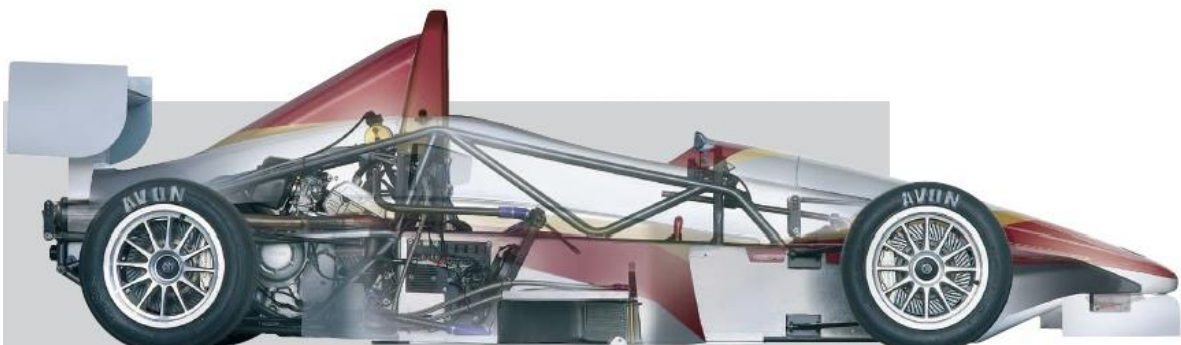


Figura 1 - Fórmula Glória B4. (Gloriacars)

Este trabalho de análise foi efetuado da seguinte forma: cada um dos três elementos dedicou-se a uma das vertentes referidas anteriormente, tendo como objetivo efetuar uma análise o mais aprofundada possível com eventuais sugestões de alterações que possam melhorar a performance do monolugar.

Claro que estando estas componentes interligadas, foi importante, também, um trabalho de equipa resultante de trocas de informação no sentido de melhorar todas as vertentes.

## 1.2 Objectivo trabalho

O objetivo da equipa foi analisar o monolugar e, se possível, sugerir melhoramentos. O trabalho descrito neste documento teve como objetivo a criação de um modelo matemático que permitisse analisar o comportamento dinâmico do monolugar.

Assim, foram abordados, ao longo do trabalho, os seguintes tópicos:

- Estudo teórico sobre a dinâmica automóvel e as variáveis que a influenciam;
- Criação de um modelo matemático relativo ao comportamento do monolugar em estudo;
- Criação de um *software* que simule o modelo matemático criado;
- Obtenção dos valores das várias variáveis que influenciam o comportamento dinâmico do Fórmula Glória B4 disponibilizado para estudo;
- Análise da influência no comportamento dinâmico de um monolugar, utilizando o *software* criado, da alteração do valor de cada variável, mantendo tudo o resto constante;

## 1.3 Elaboração do trabalho

Numa primeira fase, e tendo como base o Fórmula Glória B4 disponibilizado para estudo (Figura 2), foi feita uma descrição sobre a dinâmica automóvel, abordando os principais componentes dinâmicos do monolugar e a sua influência.



Figura 2 - Fórmula Glória B4 disponibilizado para estudo.

Numa segunda fase, foi criado um modelo matemático, definido pelas equações de movimento dos corpos mais significativos na dinâmica do veículo automóvel.

De seguida, foi concebido um *software* para correr o modelo matemático criado, simulando o seu comportamento para diferentes situações, como por exemplo, aceleração, travagem, comportamento em curva.

Houve a preocupação, ao elaborar o modelo matemático, que este permitisse uma combinação dos sete graus de liberdade envolvidos (deslocamento vertical das quatro rodas, deslocamento vertical, inclinação lateral e longitudinal da carroçaria).

Para conseguir testar o programa, foi necessário a obtenção de todos os parâmetros envolvidos no modelo matemático.

Alguns parâmetros foram obtidos através de medições e pesagens. No caso dos coeficientes de rigidez do pneu do Fórmula Glória B4 (*Toyot RS1*), não foi possível a obtenção destes valores por parte do fabricante, visto que, por se tratar de um pneu novo, são considerados confidenciais. Assim, estes valores foram obtidos experiencialmente.

Com o modelo matemático concluído foi possível analisar o comportamento dinâmico do veículo automóvel, permitindo esta análise eventuais melhorias, tendo em conta quer diferentes condicionantes externas ao monolugar, tais como, condições atmosféricas ou a massa do piloto; quer condicionantes internas do próprio veículo automóvel, como por exemplo, alteração dos pneus a utilizar, diferentes molas, diferentes asas, entre outros.

## 2 Dinâmica de um Veículo Automóvel

*“Vehicle dynamics, as we use the term, is the branch of engineering which relates tire and aerodynamics forces to overall vehicle accelerations, velocities and motions, using Newton’s Laws of motion.”* (Milliken e Milliken 1995)

*“The movements of interest are acceleration and braking, ride, and turning. Dynamic behavior is determined by the forces imposed on the vehicle from the tires, gravity and aerodynamics. The vehicle and its components are studied to determine what forces will be produced by each of these sources at a particular maneuver”* (D.Gillespie 1992)

O objetivo deste capítulo é enumerar e analisar todas as variáveis que influenciam o comportamento dinâmico do automóvel.

### 2.1 Suspensão

A suspensão é um componente muito importante num veículo automóvel, tendo por objetivo, por um lado, transmitir o movimento entre as massas não suspensas (massa da roda e metade da massa dos elementos de suspensão) e as massas suspensas (massa do monolugar e massa do piloto, exceto as massas não suspensas); por outro, manter as rodas sempre em contacto com a pista e reduzir a torção do veículo automóvel.

*“A vibração de um sistema envolve a transferência da energia cinética em potencial e da energia potencial em cinética, alternadamente.”* (Rodrigues 2012)

Para tal, a suspensão é constituída por um componente para armazenar energia cinética (elemento de massa, neste caso o chassis e os seus componentes mecânicos), um componente capaz de dissipar energia (amortecedor) e um componente com capacidade para armazenar a energia potencial (elemento elástico, neste caso, molas). (Milliken e Milliken 1995; Rodrigues 2012)

### 2.1.1 Elemento armazenador de energia cinética

Num sistema vibratório o elemento que relaciona forças com acelerações é a massa discreta (Figura 3):

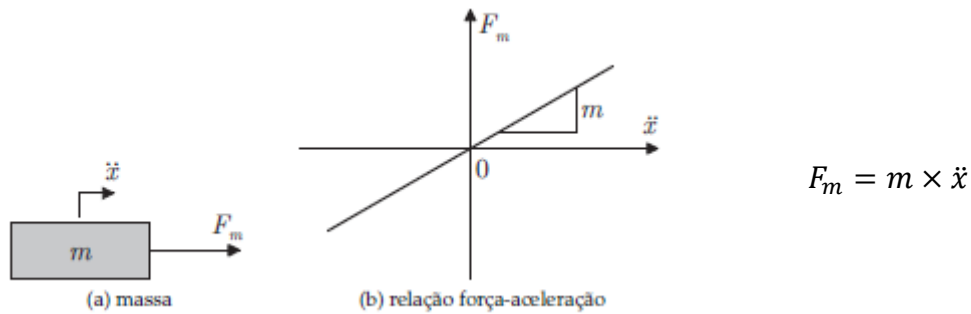


Figura 3 - Diagrama de corpo livre, gráfico e equação do elemento de massa ou inércia, respetivamente. (Rodrigues 2012)

A constante de proporcionalidade é a massa e a sua unidade é o quilograma (kg) podendo ser esta apresentada em Newton (N) se for multiplicada pela aceleração gravítica (g).

Em geral, os sistemas mecânicos são constituídos por componentes elásticos com propriedades distribuídas e por massas rígidas concentradas; ou seja, considera-se que a massa dos elementos elásticos com propriedades distribuídas é suficientemente pequena em relação às massas rígidas concentradas, sendo assim, desprezadas. Portanto, por norma, as molas e os amortecedores são considerados sem massa e as massas concentradas como corpos rígidos, sendo os elementos elásticos substituídos por elementos de mola equivalentes. (Rodrigues 2012)

### 2.1.2 Elemento de dissipação de energia

Com os amortecedores, desprovidos de massa, é possível relacionar forças com velocidades como se pode ver na Figura 4. A curva força *versus* velocidade é praticamente linear em que o seu declive é denominado por coeficiente de amortecimento efetivo ( $c$ ), sendo a unidade Newton segundo por metro (Ns/m).

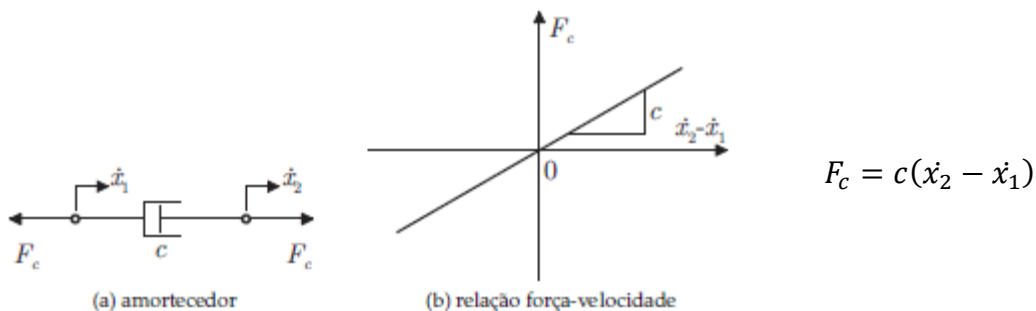


Figura 4 - Diagrama de corpo livre, gráfico e equação do elemento amortecedor, respetivamente. (Rodrigues 2012)

O amortecimento é obtido devido à passagem forçada do fluido por vários orifícios. Portanto, um fator a ter em conta é a viscosidade e o efeito da temperatura nesta. Quando a temperatura aumenta, a viscosidade decresce o que pode ter efeitos negativos no bom funcionamento do amortecedor.

Para ser mais simples, o amortecimento de um sistema pode ser caracterizado numa forma adimensional através da razão de amortecimento ( $\xi$ ) que é definido pela razão entre a constante de amortecimento efetivo ( $c$ ) e a constante de amortecimento crítico ( $c_c$ ).

O amortecimento crítico pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$c_c = 2 \times m \times \omega_n$$

Equação 1

em que  $m$  é a massa suspensa do monolugar e o  $\omega_n$  é a frequência natural não amortecida que é dada pela expressão que é dada na:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equação 2

em que  $k$  é o coeficiente de rigidez efetivo da mola e  $m$  a massa suspensa.

Logo, o amortecimento crítico  $c_c$  pode ser dado por:

$$c_c = 2 \times m \times \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equação 3

Que simplificando:

$$c_c = 2 \times \sqrt{k \times m}$$

Equação 4

Portanto a razão de amortecimento pode ser definida por:

$$\xi = \frac{c}{2 \times m \times \omega_n} = \frac{c}{2 \times \sqrt{k \times m}}$$

Equação 5

O sistema vibratório pode ser definido segundo o valor da razão de amortecimento como se pode ver na Figura 5:

- $\xi = 0$ : sistema não amortecido;
  - Resposta harmónica que não atenua ao longo do tempo;
- $0 < \xi < 1$ : sistema sub-amortecido;
  - Resposta harmónica que vai atenuando ao longo do tempo;
- $\xi = 1$ : sistema criticamente amortecido;
  - Resposta não oscilatória, ao longo do tempo a resposta tende para zero.
- $\xi > 1$ : sistema sobre-amortecido.
  - Resposta não oscilatória, ao longo do tempo a resposta atenua-se exponencialmente para zero. (Rodrigues 2012)

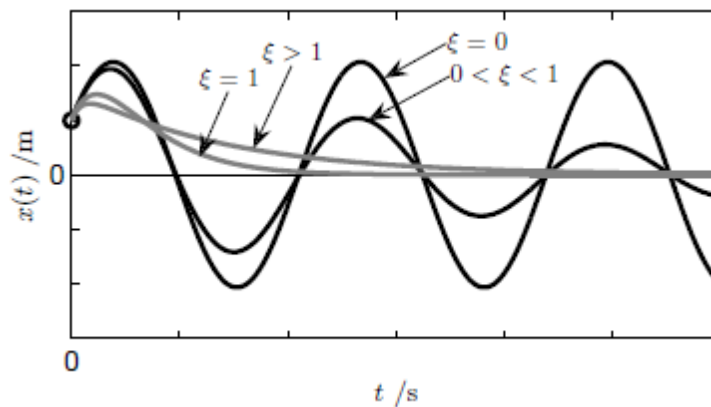


Figura 5 - Resposta livre ou natural do sistema para várias razões de amortecimento. (Rodrigues 2012)

Num automóvel de competição a performance sobrepõe-se ao conforto. Portanto, o objetivo é que a massa retorne o mais rapidamente possível à posição de equilíbrio, ou seja, a razão de amortecimento ideal deve ser igual à unidade, sendo o sistema criticamente amortecido (Figura 6).

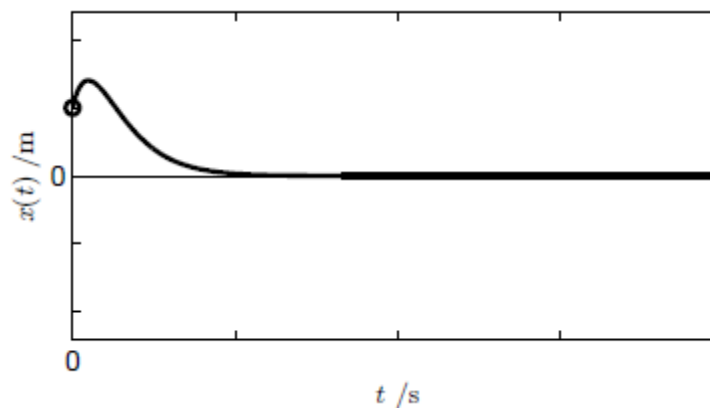


Figura 6 - Resposta livre ou natural do sistema criticamente amortecido  $\xi = 1$ . (Rodrigues 2012)

### 2.1.3 Elemento elástico

Este elemento relaciona forças com deslocamentos, sendo a força proporcional à elongação ( $\delta$ ), ou seja, à diferença de deslocamentos ( $x_2 - x_1$ ), como mostra a Figura 7. Por norma, os elementos elásticos são considerados sem massa, tal como os elementos de dissipação de energia (capítulo 2.1.2).

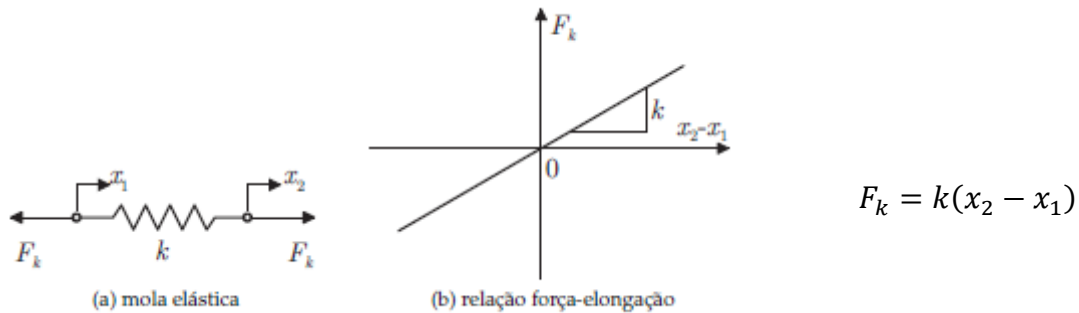


Figura 7 - Diagrama de corpo livre, gráfico e equação do elemento mola, respetivamente. (Rodrigues 2012)

A constante de proporcionalidade é designada por constante de rigidez ( $k$ ), sendo a unidade o Newton por metro (N/m). (Rodrigues 2012)

### 2.1.4 Barras estabilizadoras

O objetivo de uma barra estabilizadora é permitir que o veículo automóvel possua o melhor *handling* possível. Para tal, esta liga a suspensão esquerda com a direita, como podemos verificar na Figura 8. Em curva, existe transferência de massa da roda interior para a exterior. A utilização da barra estabilizadora minimiza esta transferência, de acordo com o princípio de torção de barras.

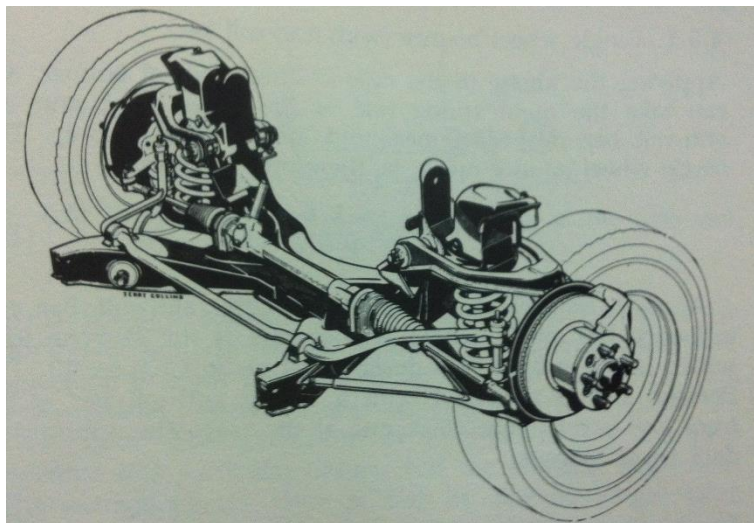


Figura 8 - Barra estabilizadora. (Campbell 1981)



A subviragem e a sobreviragem são fenómenos que ocorrem quando se vira demasiado as rodas (ângulo superior ao da curva) e quando se vira de menos (ângulo inferior ao da curva), respetivamente. Para melhor ilustrar, temos a Figura 9 em que se notam perfeitamente estes fenómenos.

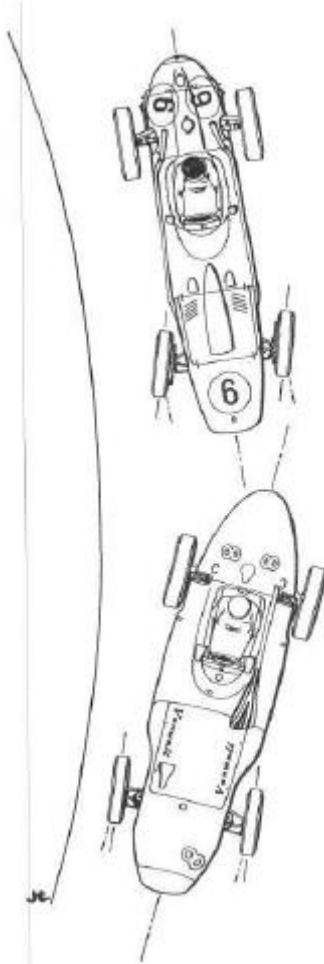


Figura 9 - Subviragem (em cima) e sobreviragem (em baixo). (Puhn 1976)

Para reduzir a subviragem, aumenta-se a rigidez torsional da barra estabilizadora traseira (por exemplo: aumentando o diâmetro) e/ou diminui-se a rigidez torsional da barra dianteira (por exemplo: aumentando o comprimento). No caso da sobreviragem, para esta ser reduzida faz-se o oposto, ou seja, diminui-se a rigidez torsional da barra estabilizadora traseira e/ou aumenta-se a rigidez torsional da barra dianteira.

Existem várias formas de calcular a rigidez torsional da barra estabilizadora. De seguida apresenta-se uma das possíveis - Figura 10. Para obter o momento resistente multiplica-se o coeficiente de rigidez torsional pelo ângulo de *roll* - rotação do carro segundo a longitudinal do veículo automóvel.

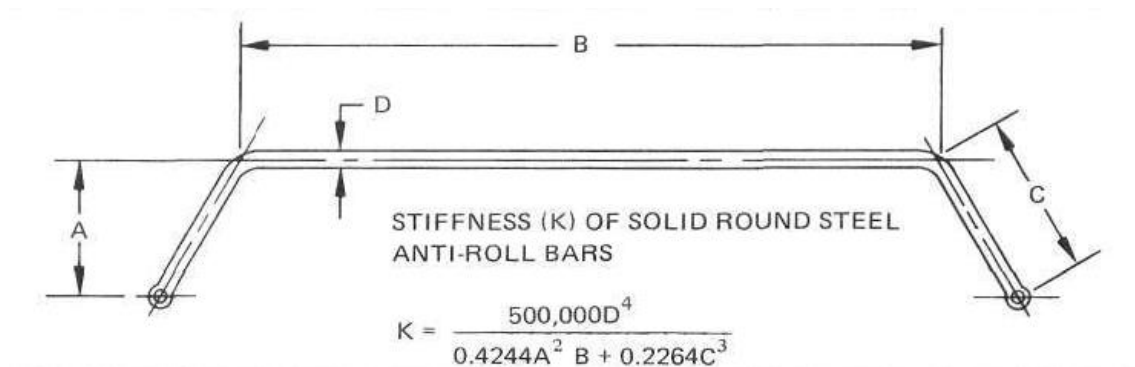


Figura 10 – Rigidez torsional de uma barra estabilizadora. (Puhn 1976)

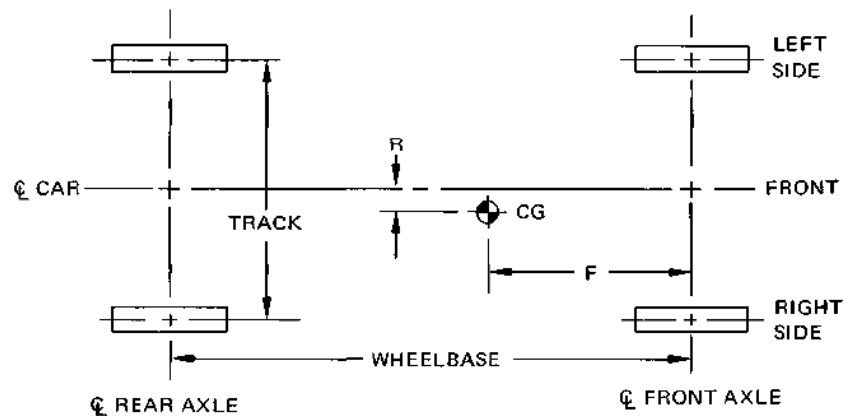
A subviragem e a sobreviragem, também podem ser ajustadas pela inclinação das asas – ver capítulo 2.6. (Campbell 1973, 1981; Puhn 1976)

## 2.2 Centro de gravidade

O centro de gravidade (CG) ou centro de massa é um ponto geométrico no veículo automóvel em que se pode assumir que toda a sua massa está concentrada para efeitos de cálculo, uma vez que a aceleração gravítica não é alterada em nenhum ponto do carro.

No entanto, este ponto varia ao longo da corrida, por exemplo, à medida que o depósito de combustível vai sendo usado. Esta diminuição do peso do veículo automóvel altera o centro de gravidade. No entanto, esta variação foi desprezada para efeitos de cálculo.

Para calcular o centro de gravidade, foi necessário ter alguns detalhes em atenção, tais como: ver nível do depósito de gasolina, verificar se o chão estava nivelado e bloquear a suspensão. De seguida, foram usadas relações trigonométricas para calcular o centro de gravidade que estão demonstradas na Figura 11 e na Figura 12.



$$F = \frac{\text{REAR WHEEL WEIGHT}}{\text{TOTAL WEIGHT}} \times \text{WHEELBASE}$$

$$R = \left( \frac{\text{RIGHT WHEEL WEIGHT}}{\text{TOTAL WEIGHT}} - 1/2 \right) \times \text{TRACK}$$

Figura 11 - Vista vertical do carro e fórmula para cálculo CG no plano horizontal. (Puhn 1976)

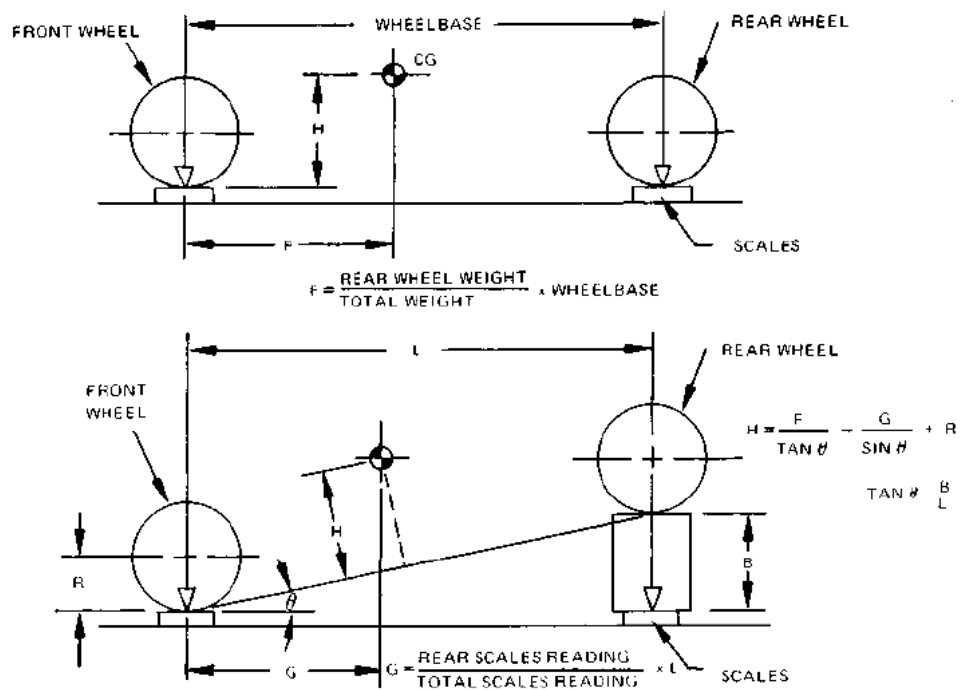


Figura 12 - Vista lateral do carro e fórmula para cálculo da altura do CG. (Puhn 1976)

É de notar, que quanto maior for o desnível (B) entre a parte traseira e dianteira do veículo automóvel, melhor será a precisão. (Puhn 1976)

### 2.3 Centro e eixo de rolamento

*“Roll Center – That point in the transverse vertical plane through any pair of wheel centers and equidistant from them, at which lateral forces may be applied to the sprung mass without producing an angular (roll) displacement of the sprung mass”.* (Milliken e Milliken 1995)

A determinação do centro de rolamento (*roll center*) é conseguida através de um desenho à escala e seguindo as várias metodologias para cada tipo de braços de suspensão, como podemos ver na Figura 13 e na Figura 14.

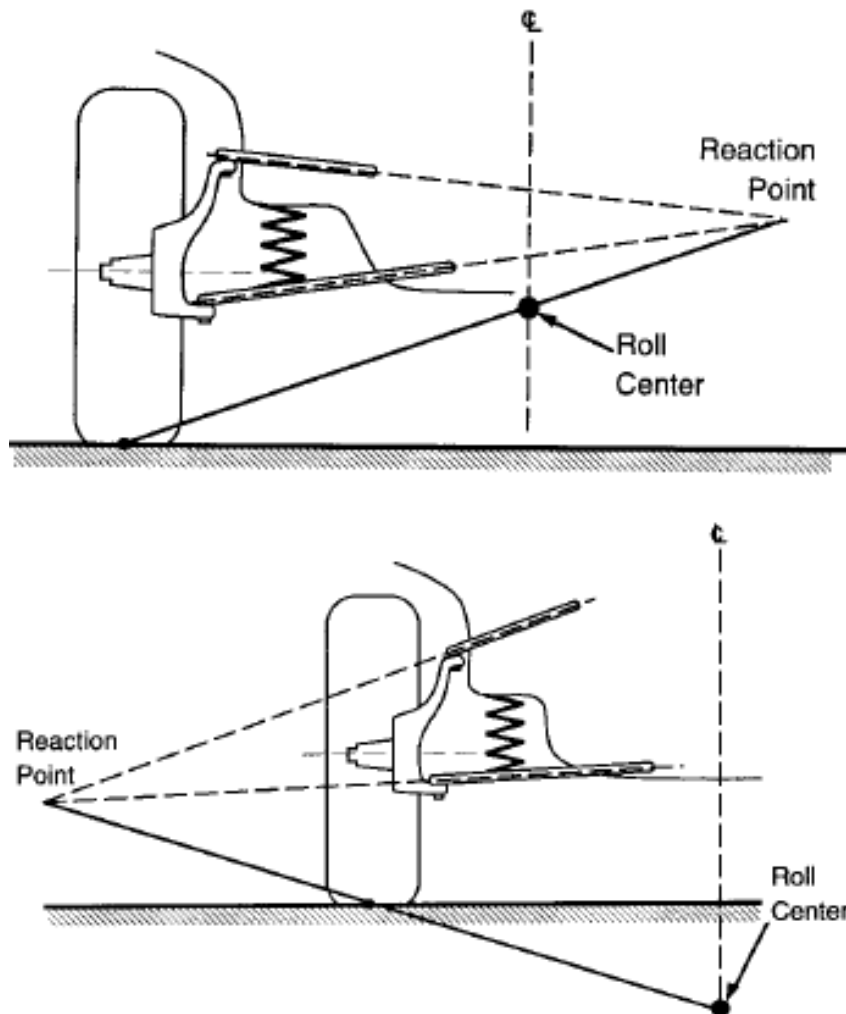


Figura 13 - Roll center com braços de suspensão com ângulos positivos e negativos, respetivamente. (D.Gillespie 1992)

Para determinar o centro de rolamento (*roll center*) com braços de suspensão com ângulos positivos e negativos (Figura 13) precisamos de definir 3 pontos:

- Centro de gravidade
  - Ver capítulo 2.2;
- Ponto de reação
  - Determinado pela interseção das duas retas que contêm os braços da suspensão;
- Ponto de contato do pneu com o solo
  - Considera-se o ponto correspondente à metade da superfície de pneu em contato com o solo.

Definidos estes três pontos, o centro de rolamento obtém-se com a interseção do plano vertical longitudinal ao carro que passa pelo centro de gravidade com a reta que contém os outros dois pontos (ponto de reação e ponto de contato do pneu com o solo).

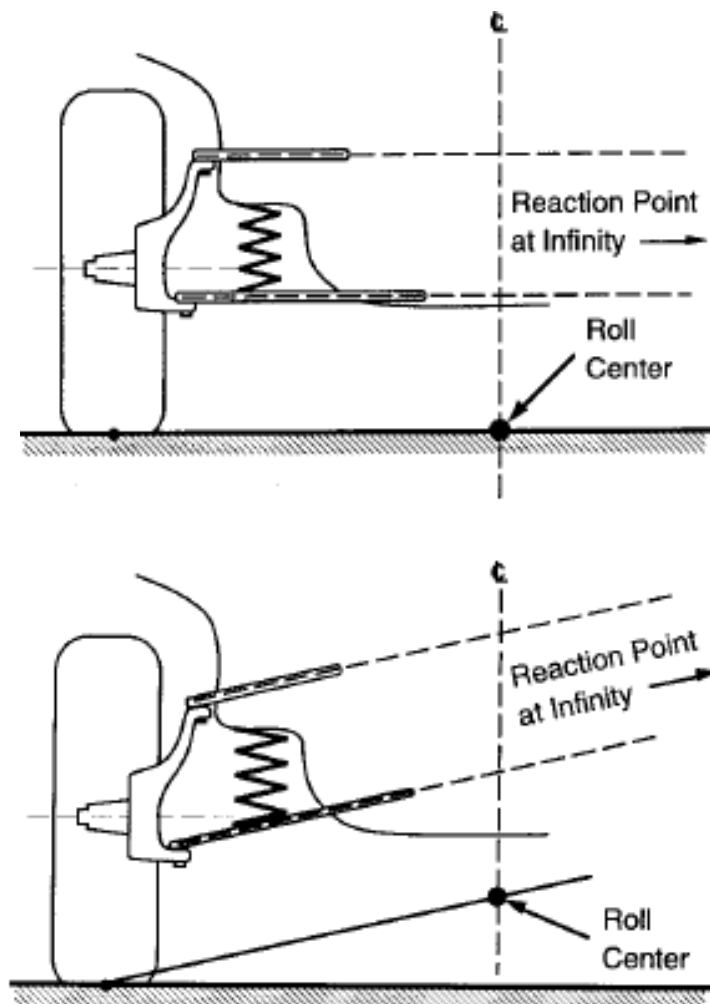


Figura 14 - Roll center com braços de suspensão paralelos. (D.Gillespie 1992)

Para determinar o centro de rolamento (*roll center*) com braços de suspensão paralelos (Figura 14), e uma vez que o ponto de reação se intersesta no infinito, precisamos apenas de definir, da mesma forma que no caso anterior, o centro de gravidade e o ponto de contato do pneu com o solo.

Definidos estes dois pontos, o centro de rolamento obtém-se com a interseção do plano vertical longitudinal ao veículo automóvel que passa pelo centro de gravidade com a semi-reta paralela aos braços de suspensão com origem no ponto de contato do pneu com o solo.

Calculados os centros de rolamento dianteiro e traseiro, podemos, determinar o eixo de rolamento que resulta da união destes dois centros, como se pode ver na Figura 15. A massa suspensa – *sprung mass* (Figura 16) sofre rotação através deste eixo.

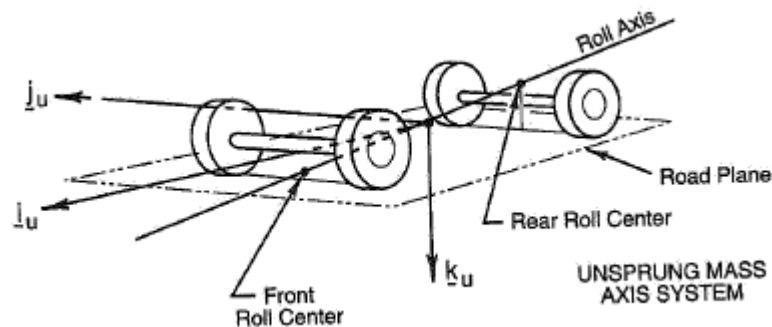


Figura 15 - Eixo de rolamento. (Milliken e Milliken 1995)

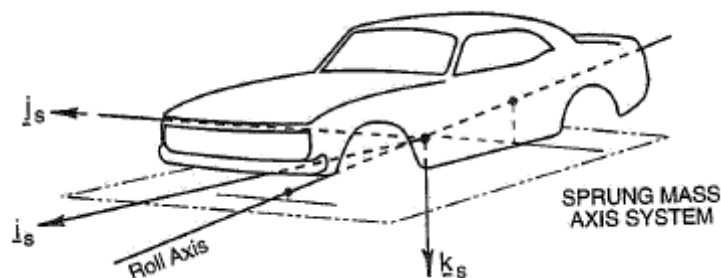


Figura 16 - Massa suspensa com indicação do eixo de rolamento. (Milliken e Milliken 1995)

O momento resultante deste fenómeno (momento de rolamento), como qualquer outro, é calculado através da multiplicação da força (neste caso, a força centrífuga) e a distância (neste caso, entre o centro de massa e o centro de rolamento). Quanto menor for esta distância, menor será o momento criado. No entanto, se esta distância for demasiado curta, é equivalente a possuir uma suspensão demasiado rígida, aumentando a transferência de massa (ver capítulo 2.4) para o lado exterior da curva, aumentando o efeito de subviragem ou sobreviragem. (D.Gillespie 1992; Milliken e Milliken 1995)

## 2.4 Transferência de massa

Quando se acelera, trava ou se dá uma curva, existe transferência de massa de umas rodas para as outras. Para melhor perceber este conceito, este capítulo foi dividido nas duas direções principais: a longitudinal (aceleração e travagem) e a lateral (em curva).

### 2.4.1 Lateral

Devido à aceleração centrífuga gerada em curva, existe uma transferência lateral de massa do par de rodas interior para o par exterior. Esta quantidade de massa depende de vários fatores, tais como: velocidade, altura do centro de gravidade e do raio da curva. Na Figura 17 a altura do centro de gravidade está representada por  $h$  e a força centrífuga por  $F$  (força que já inclui os parâmetros de velocidade e raio da curva).

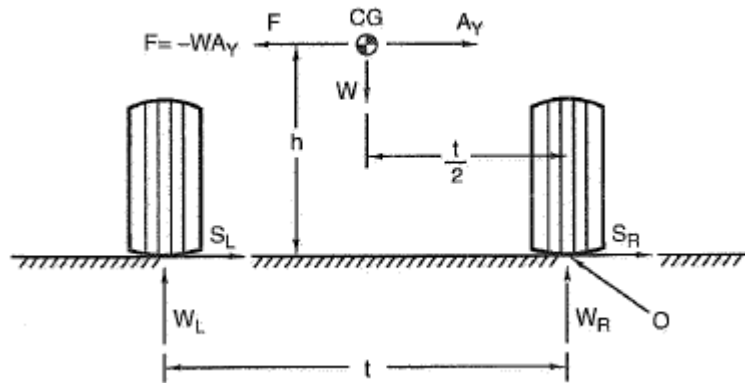


Figura 17 - Transferência de massa lateral. (Milliken e Milliken 1995)

Portanto, podemos dizer que o momento de rolamento ( $M_{Roll}$ ) é dado pela seguinte expressão:

$$M_{Roll} = F \times h = m_{st} \times a_y \times h_{cg}$$

Equação 6

Onde:

- $m_{st}$  = Massa suspensa total<sup>1</sup>;
- $a_y$  = Aceleração lateral;
- $h_{cg}$  = Altura do centro de gravidade.

É de notar que a força centrífuga  $F$  contraria a aceleração lateral  $A_y$  gerada pelas forças laterais inerentes aos pneus  $S_L$  e  $S_R$ . (D.Gillespie 1992; Milliken e Milliken 1995)

#### 2.4.2 Longitudinal

A transferência de massa longitudinal dá-se de maneira análoga à lateral, só que esta deve-se às acelerações provocadas na aceleração e na travagem.

Durante a travagem, o monolugar tem o seu peso transferido das rodas traseiras para as dianteiras, promovendo um ganho de tração nas rodas dianteiras, enquanto perde nas rodas traseiras. No caso da aceleração, dá-se exatamente o oposto, obtendo ganho de tração nas rodas traseiras. Na Figura 18 podemos ver as semelhanças entre este fenómeno e a transferência de massa lateral. Neste caso, os fatores importantes são: a velocidade e a altura do centro de gravidade. (Milliken e Milliken 1995)

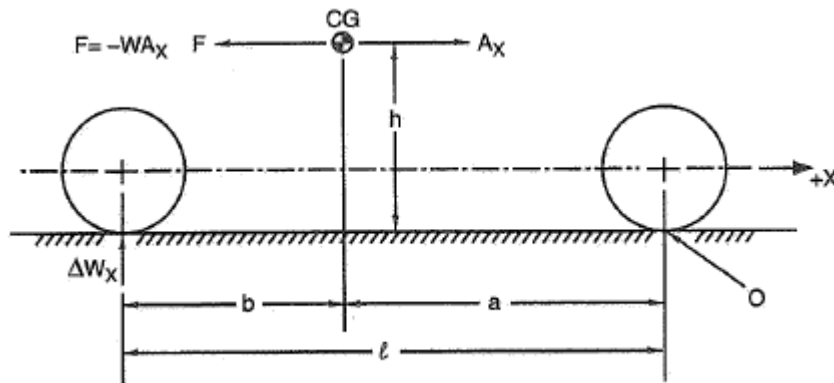


Figura 18 - Transferência de massa longitudinal. (Milliken e Milliken 1995)

Portanto, podemos dizer que o momento de pitch ( $M_{Pitch}$ ) é dado pela seguinte expressão:

$$M_{Pitch} = F \times h = m_{st} \times a_x \times h_{cg}$$

Equação 7

Onde:

- $a_x$  = Aceleração longitudinal;

<sup>1</sup> Soma da massa suspensa (veículo) com a massa do condutor



## 2.5 Momentos de inércia

Quanto maior for a inércia do monolugar, maior vai ser a dificuldade do automóvel responder ao piloto. Portanto, interessa termos o menor valor de inércia possível para que quando o piloto queira iniciar uma curva, o monolugar responda o mais rapidamente possível.

O valor do momento de inércia ideal é obtido através do somatório das massas com o teorema de *Steiner* (multiplicação da massa com o quadrado da distância do centro de gravidade de cada corpo até ao centro de gravidade do monolugar).

No entanto, foi usado um valor do momento de inércia aproximado, em que o monolugar foi considerado como um paralelepípedo de massa uniforme e mesmo material, fazendo com que o momento de inércia lateral ( $I_y$ ) e o longitudinal ( $I_x$ ) fossem dados por:

$$I_y = \frac{m}{12} \times (h^2 + c^2)$$

Equação 8

$$I_x = \frac{m}{12} \times (h^2 + l^2)$$

Equação 9

Em que  $m$  representa a massa,  $h$  a altura,  $c$  o comprimento e  $l$  a largura do veículo automóvel. (Gomes 2009)

## 2.6 Downforce

O objetivo principal do monolugar, tal como em qualquer outra competição motorizada, é obter a máxima performance, ou seja, conseguir transmitir toda a potência fornecida pelo motor para a pista, sem provocar derrapagens.

Para conseguir evitar estas perdas de potência (derrapagens) devemos aumentar o peso. Contudo, este aumento também acarreta desvantagens, pois diminui a performance ou requer aumento da potência para a manter.

Aproveitando os fluxos de ar gerados à volta do carro em movimento, utilizam-se asas inclinadas que usam estes fluxos para criar um incremento de peso virtual, aumentando assim a aderência (“empurrando” o carro para a pista), que permite curvar com maior velocidade. “A wing can make a plane fly, but if we put it upside down, it can make a car NOT fly” (Formula1-dictionary)

O ideal seria poder mudar os ângulos das asas durante a própria corrida, obtendo uma maior velocidade nas retas e obter uma melhor aderência nas curvas.

A *downforce* deve ser aplicada de uma forma equilibrada entre os lados e entre a frente e a traseira. No caso do equilíbrio lateral, este deve-se ao simples fato de o carro ser simétrico; quanto ao equilíbrio longitudinal, este é mais complexo visto que o fluxo de ar frontal vai afetar o fluxo de ar que passa pela traseira do carro.

Um carro de fórmula 1 pode chegar aos 5 “G” de força descendente (5 vezes o peso do carro). Este peso virtual tem uma distribuição como se pode ver na Figura 19.

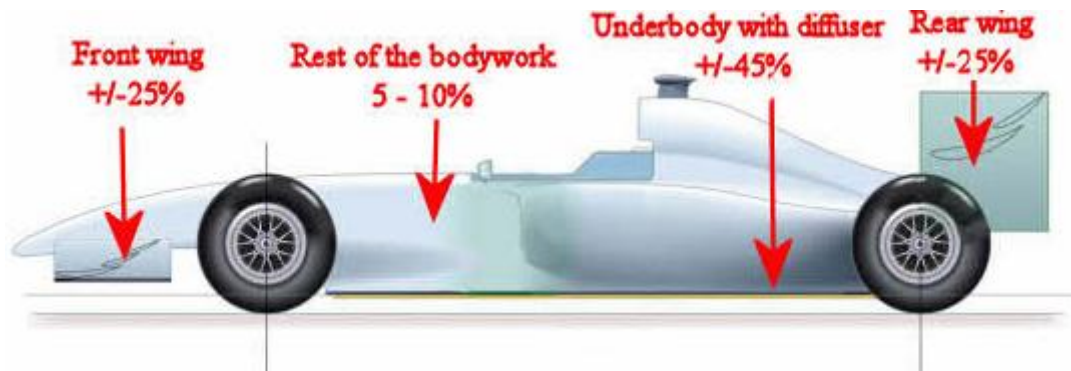


Figura 19 - Percentagens *downforce* num monolugar com difusor. (Formula1-dictionary)

A *downforce* deve ser ajustada antes de cada prova, de acordo com o traçado e com o comportamento do carro. Caso haja um aumento da *downforce* na asa dianteira aumenta a sobreviragem, no caso da asa traseira, um aumento da força descendente provoca um aumento da subviragem. No entanto, o aumento da *downforce* implica um aumento do coeficiente de arrasto (resistência à passagem do ar). (Formula1-dictionary)

## 2.7 Aerodinâmica

A vantagem de se usar suspensões *push-rod* ou *pull-rod* tem a ver com o facto de que os componentes como molas, amortecedores e barras estabilizadoras ficam dentro do monolugar, fazendo com que a aerodinâmica melhore substancialmente (como se pode ver na Figura 20).



Figura 20 - Amortecedores monolugar antigo (esq.) e mais recente (dir.). (Campbell 1981; Wright 2001)

É de notar que nestes casos a única parte exterior são os braços da suspensão. No entanto, existem cuidados em termos aerodinâmicos que são tanto mais apurados, quanto mais elevado for o nível de competição.

A forma dos tubos em asa em vez de redondos melhora o arrasto do ar, oferecem uma menor resistência, aumentando assim, a *performance* do carro (Figura 21).

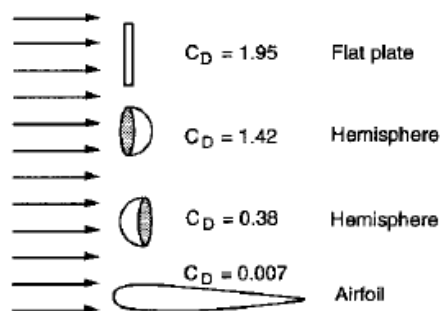


Figura 21 - Coeficiente de arrasto para diferentes formas. (D.Gillespie 1992)

Como podemos ver na Figura 22, para o mesmo número de Reynolds, isto é, para as mesmas condições (velocidade, comprimento e viscosidade cinemática), o coeficiente de arrasto ( $C_D$ ) aumenta substancialmente da forma de asa (*airfoil*) para a forma circular (*circle*).

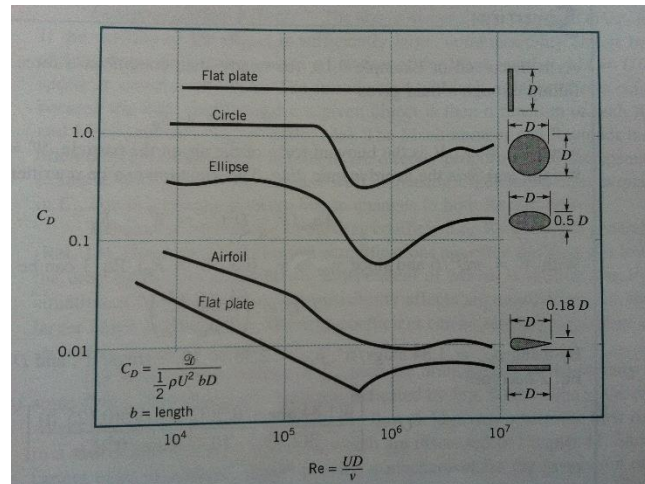


Figura 22 – Coeficiente de arrasto para diferentes formas em função do número de Reynolds. (Munson, Young, e Okiishi 1998)

O Fórmula Glória B4 já tem algum cuidado relativamente à aerodinâmica, visto que os braços da suspensão se encontram num tipo intermédio entre a asa e o redondo, muito próximo duma elipse, como se pode ver na Figura 23. (Campbell 1981; D.Gillespie 1992; Munson, Young, e Okiishi 1998; Wright 2001)



Figura 23 - Forma dos braços de suspensão do Fórmula Glória B4 disponibilizado para estudo.

## 2.8 Pneus

O pneu é um componente muito importante, uma vez que tem que suportar o veículo automóvel e permitir que este consiga acelerar, travar e virar; para tal, o pneu tem que desenvolver forças longitudinais e laterais, respetivamente.

Assim, a escolha do pneu tem que seguir alguns critérios que vão ser analisados de seguida, tais como: *camber*, forças (laterais e longitudinais), respetivos escorregamentos, pressão e temperatura. (D.Gillespie 1992; Milliken e Milliken 1995; Puhn 1976)

### 2.8.1 Camber

Para um pneu aderir melhor à pista, este deve usar a maior área de contacto possível. O ângulo de *camber* é a inclinação para dentro ou para fora dos pneus quando se olha para estes de frente, como se pode ver na Figura 24.

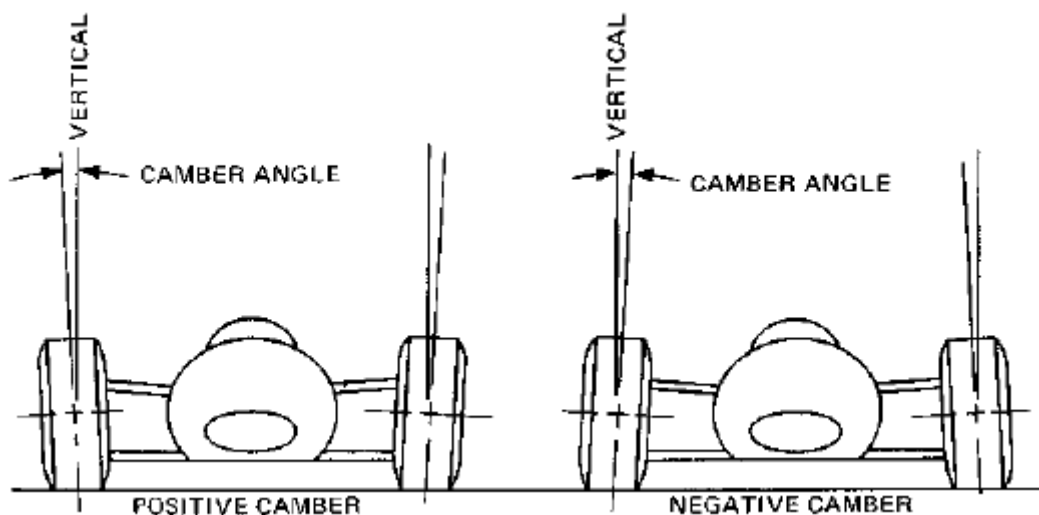


Figura 24 - Camber positivo e negativo. (Puhn 1976)

O ideal para competição é ter um *camber* negativo, para que em linha reta, possua o menor atrito possível e em curva, as rodas de fora (mais carregadas) possuam um maior atrito (ou seja, maior área de contato com a pista), conseguindo dar curvas com uma maior velocidade.

Para saber quais os ângulos ideais de *camber*, o carro tem que ser testado em pista, porque só assim, através de afinações, se conseguem obter os valores ideais, pelo método tentativa erro.

Se a pista tiver muitas curvas, convém ter um ângulo de *camber* maior para que o pneu se desgaste uniformemente. Se tiver poucas curvas convém ter um ângulo de *camber* inferior para que o pneu não se desgaste muito na parte interior relativamente ao resto do pneu.

Para melhor ilustrar o que foi dito anteriormente é apresentado na Figura 25 a variação do coeficiente de atrito para vários valores de *camber* (desde valores positivos a negativos). (Puhn 1976; Smith 1978)

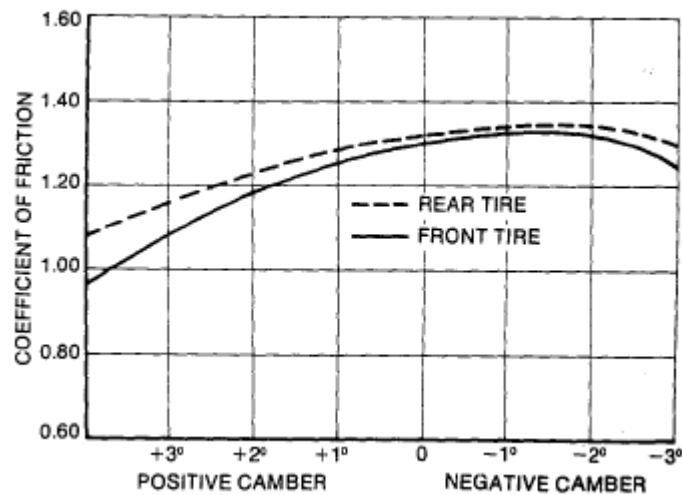


Figura 25 - Variação do coeficiente de atrito em função do ângulo de camber. (Smith 1978)

### 2.8.2 Força lateral e longitudinal

O carro consegue acelerar e travar devido à força longitudinal e curvar devido à existência da força lateral. Em pista estas duas forças são combinadas em vários momentos. Por exemplo, numa curva existem etapas em que apenas existe a força longitudinal de travagem, uma combinação de força longitudinal de travagem com lateral, apenas força lateral, combinação de força longitudinal de aceleração com lateral e por fim apenas força longitudinal de aceleração, como se pode ver na Figura 26. (Milliken e Milliken 1995; Smith 1978)

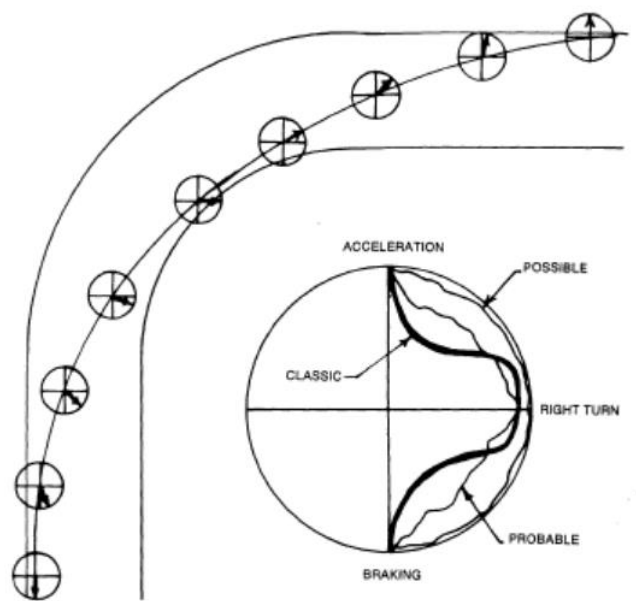


Figura 26 - Vetor de força resultante durante uma curva. (Smith 1978)

### 2.8.3 Escorregamento

Existe escorregamento lateral (*slip angle*) e longitudinal (*slip ratio*) devido às forças referidas anteriormente.

Quando um pneu é submetido a uma força lateral deforma-se. A deformação dá-se nas paredes verticais do pneu (Figura 27) e na parte de contacto com o solo (Figura 28). Quando um pneu é submetido a uma força lateral, desliza para o lado criando um ângulo entre a direção que se pretende e a direção real, denominado por *slip angle*. (D.Gillespie 1992; Milliken e Milliken 1995)

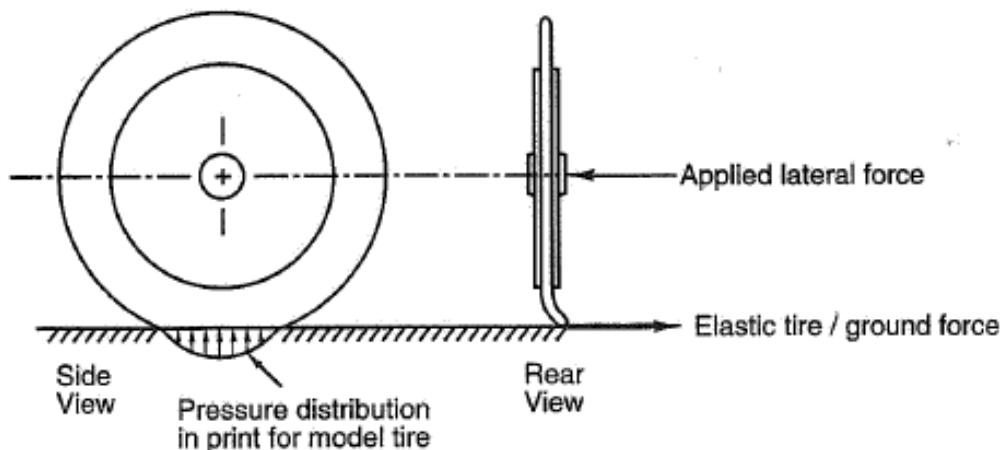


Figura 27 - Deformação nas paredes verticais. (Milliken e Milliken 1995)

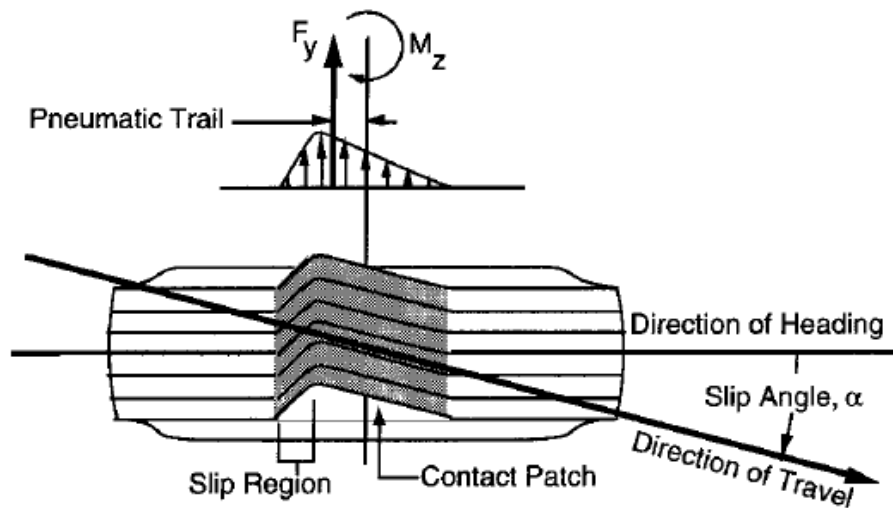


Figura 28 - Deformação na zona de contacto com o solo. (D.Gillespie 1992)

Como vimos anteriormente, a variação do *slip angle* com a força lateral pode ser dividido em três fases distintas (como se pode ver na Figura 29):

1. Fase elástica em que o gráfico apresenta uma reta diretamente proporcional denominada por *cornering stiffness*<sup>2</sup>;
2. Fase de transição em que aumentando a força lateral, o *slip angle* também aumenta;
3. Fase de fricção em que com o aumento do *slip angle* a força lateral começa a decrescer.

É de notar que os pneus de competição atingem o valor máximo de força lateral para valores situados entre os 3 e os 7 graus de *slip angle* quando a pista está seca. Quando esta se encontra molhada, estes valores descem um pouco e o decréscimo na fase final é maior. (Milliken e Milliken 1995)

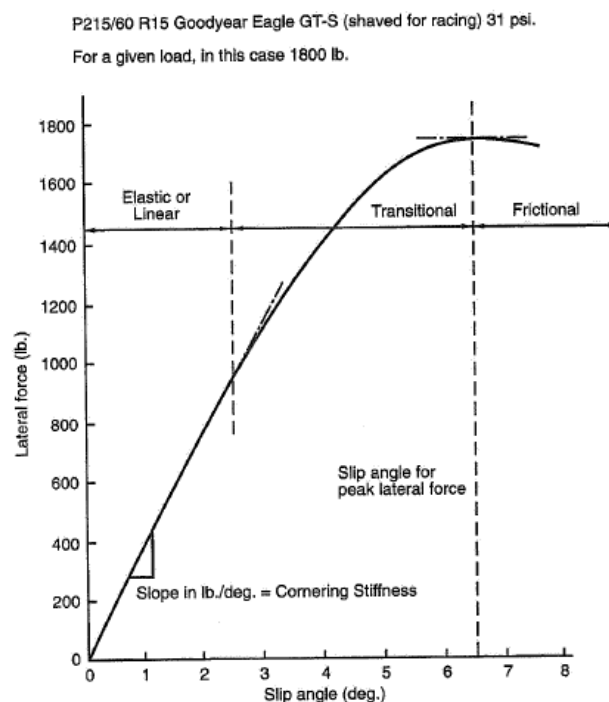


Figura 29 - Relação entre força lateral e slip angle e respetivas fases. (Milliken e Milliken 1995)

Nota: Embora o gráfico da Figura 29 analise a relação entre a força lateral e o *slip angle* de um veículo automóvel com 1800 lb<sup>3</sup> (cerca de 8000N) e não de um com aproximadamente 3920N (cerca de 880 lb), serve para ilustrar as diferentes fases da relação.

<sup>2</sup> Representa a força lateral por *slip angle*

<sup>3</sup> Unidade de força do sistema imperial em que 1 lb = 4.448 N



A Figura 30 demonstra a relação entre os três fatores: força lateral, carga vertical e *slip angle*:

- Quanto maior a carga vertical, para o mesmo *slip angle*, maior a força lateral;
- Quanto maior a carga vertical, para a mesma força lateral, menor o *slip angle*;
- O *cornering stiffness* aumenta com o aumento da carga vertical;
- Com o aumento da carga vertical, a força lateral atinge o máximo para valores de *slip angle* superiores. (Milliken e Milliken 1995)

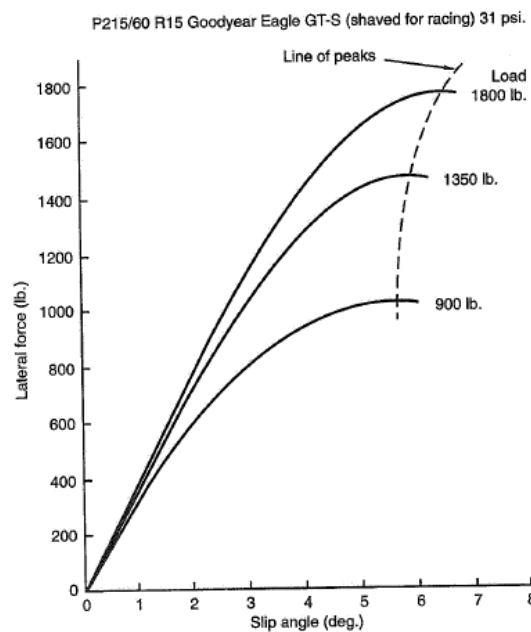


Figura 30 - Relação entre a força lateral e o *slip angle* para várias cargas verticais. (Milliken e Milliken 1995)

O coeficiente de força lateral ( $F_y/F_z$ ) do pneu é o quociente entre a força lateral e a carga vertical aplicada ao pneu.

$$\frac{\text{Força lateral}}{\text{Carga aplicada ao pneu}} = \frac{F_y}{F_z}$$

Equação 10

Quanto maior a carga aplicada ao pneu, para o mesmo *slip angle*, menor será o coeficiente de força lateral, como se pode comprovar na Figura 31.

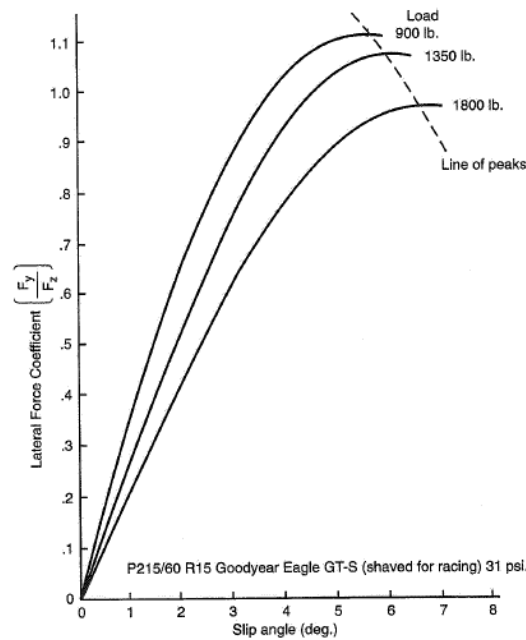


Figura 31- Relação entre o coeficiente de força lateral e o slip angle para várias cargas verticais. (Milliken e Milliken 1995)

Quanto às forças que existem na aceleração e na travagem estas são lineares até atingirem o seu máximo, depois decrescem (no caso da aceleração esta descida é mais acentuada – gráfico da esquerda da Figura 32). O valor durante a aceleração começa a estagnar quando a roda começa a “derrapar”. No caso da travagem, deixa de haver força uma vez que a roda fica bloqueada – gráfico da direita da Figura 32. (Milliken e Milliken 1995)

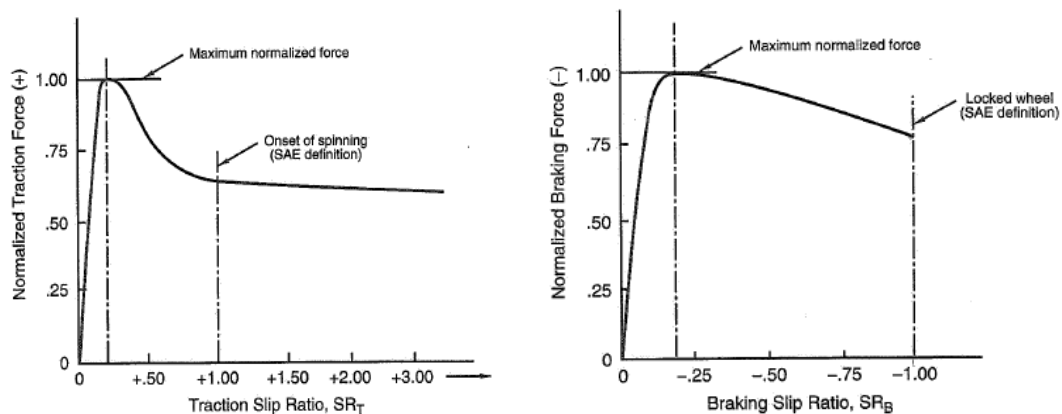


Figura 32 - Força normalizada na aceleração (esquerda) e na travagem (direita). (Milliken e Milliken 1995)

#### 2.8.4 Pressão e temperatura

A pressão ideal só se consegue obter experimentalmente e deve-se usar como ponto de partida a recomendação feita pela marca. É de salientar que uma alteração do valor da pressão irá fazer com que o escorregamento seja diferente, ou seja, o *slip angle* e o *slip ratio*. No entanto, a pressão dos pneus é um dos fatores mais fáceis de mudar e por isso é muito comum utilizar a pressão para configurar o carro antes de uma corrida.

Não conseguindo obter a pressão ideal, é melhor ter pressão a mais do que a menos, uma vez que não se perde tanta aderência (Figura 33). (Milliken e Milliken 1995; Puhn 1976)

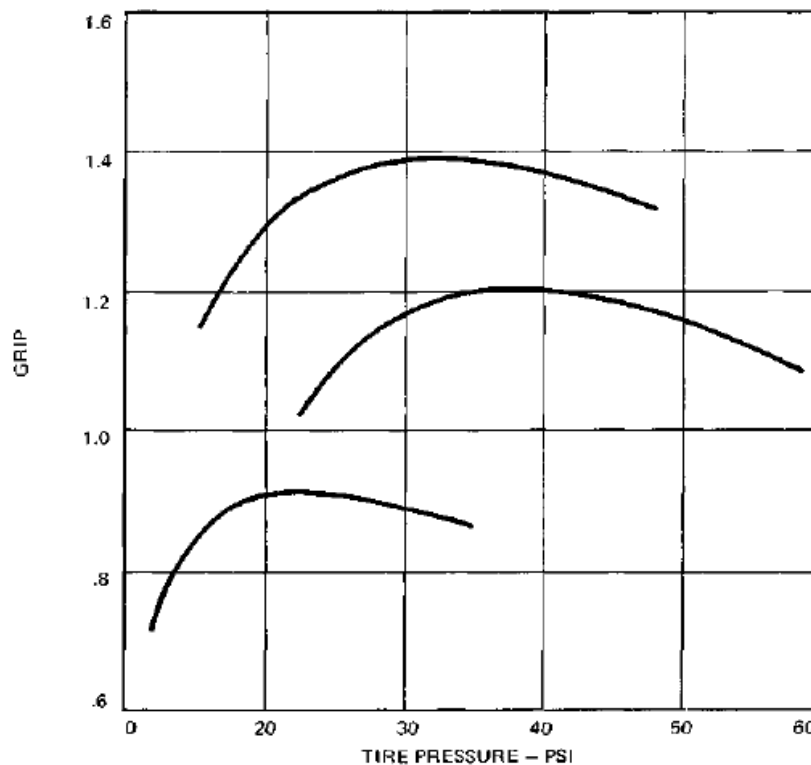


Figura 33 - Aderência do pneu em função da pressão. (Puhn 1976)

Os pneus modernos são feitos para andarem nas suas condições máximas de aderência a uma certa temperatura. Qualquer variação desta vai resultar em perda de aderência.

Para determinar a temperatura do pneu é preciso ter em conta a temperatura ambiente e o calor resultante das forças aplicadas (tanto laterais como longitudinais). Não esquecer que a temperatura tem uma grande influência na rigidez da borracha, alterando o comportamento em curva.

A Figura 34 ilustra o comportamento de um pneu em que existe um máximo, ponto ideal de circulação, que neste caso é de aproximadamente 240 °F (cerca de 115 °C). (Milliken e Milliken 1995; Puhn 1976)

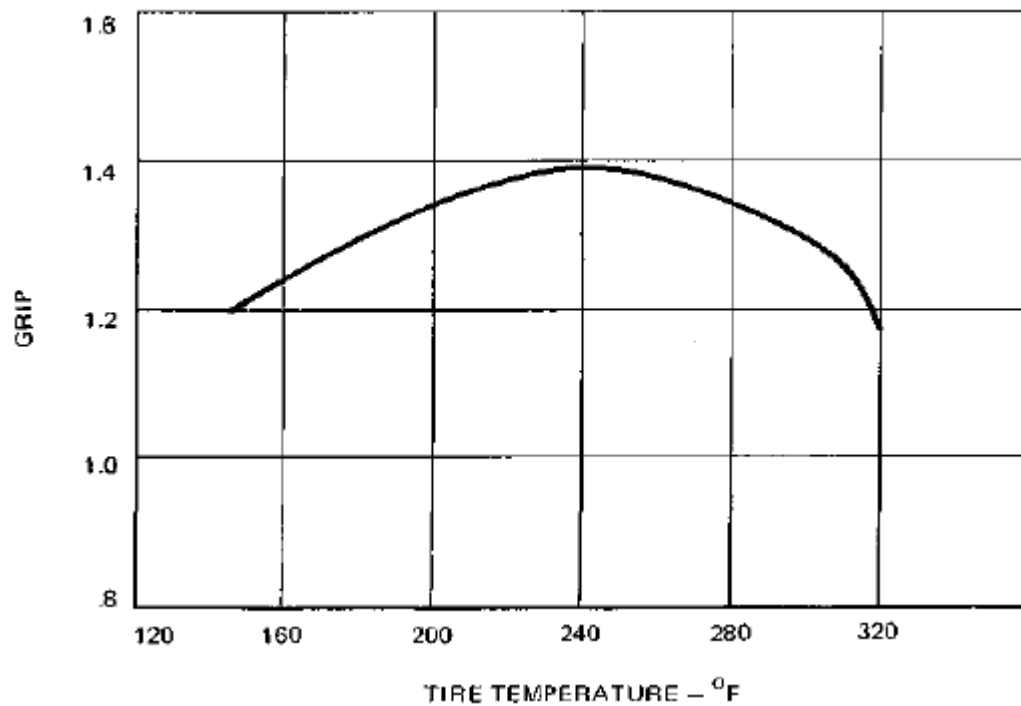


Figura 34 – Exemplo de aderência dum pneu em função da temperatura. (Puhn 1976)

A pressão e a temperatura estão interligadas. Se tivermos uma pressão inicial baixa, vai resultar num aquecimento do pneu, provocando um aumento da pressão (fator indesejado). (Milliken e Milliken 1995; Puhn 1976)

### 3 Modelo Matemático

O objetivo da criação deste modelo matemático foi conseguir obter a máxima *performance* para que o piloto possa tirar o melhor partido do veículo automóvel.

Para tal, este modelo contemplou a massa suspensa (considerando o peso do piloto), a massa não suspensa, a força vertical dos pneus, a força aerodinâmica, a força das molas e dos amortecedores, os momentos das barras estabilizadoras (dianteira e traseira), o momento de *roll* e o momento de *pitch*. O modelo é constituído por equações que nos permitem prever o comportamento de um veículo automóvel nas várias situações, tais como:

- Equilíbrio estático;
- Transferências de massa laterais;
- Transferências de massa longitudinais.

Para poder tirar o máximo partido deste modelo, foi utilizado um *software* computacional (Simulink<sup>®4</sup>) para conseguir ter um maior número de graus de liberdade (neste caso sete). Assim, foi possível prever o deslocamento vertical da carroçaria (massa suspensa) e de cada roda (massas não suspensas); assim como a rotação longitudinal (*pitch*) e a rotação lateral (*roll*).

As equações de movimento puderam ser convenientemente estabelecidas com base nos diagramas de corpo livre de todas as massas constituintes do sistema (neste caso, a massa suspensa e a massa de cada roda). O diagrama de corpo livre de uma massa é construído isolando a massa e colocando as respetivas forças externas que atuam nesta.

---

<sup>4</sup> Ferramenta do *software* MATLAB<sup>®</sup>

Para começar o modelo matemático, foram feitas as equações de equilíbrio no caso estático. Para tal, utilizou-se o modelo de uma roda, ou seja, um quarto de carro.

Na Figura 35 está representada a massa suspensa por  $m_c$ , a massa de cada roda por  $m_w$ , a rigidez da mola do amortecedor por  $k'_s$ , o coeficiente de amortecimento  $c$  e a rigidez do pneu por  $k'_t$ . (Milliken e Milliken 1995)

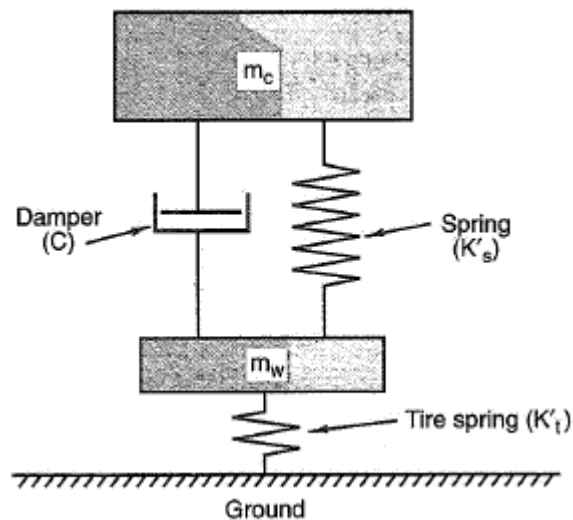


Figura 35 - Modelo de quarto de carro. (Milliken e Milliken 1995)

Obtendo o equilíbrio de forças, pode-se proceder à aplicação da 2ª lei de Newton que relaciona a força com a aceleração, considerando que a massa do corpo é constante, através da seguinte expressão:

$$\vec{F} = m \times \vec{a}$$

Equação 11

### 3.1 Equilíbrio estático

Numa primeira fase, criaram-se o diagrama de corpo livre da roda da frente do lado esquerdo – massa não suspensa 1 (Figura 36) e as respetivas equações.

Relativamente à Figura 35 acrescentou-se o efeito do amortecimento do pneu, representado por  $F_{cp}$ . É de notar que para as outras rodas apenas muda o respetivo índice.

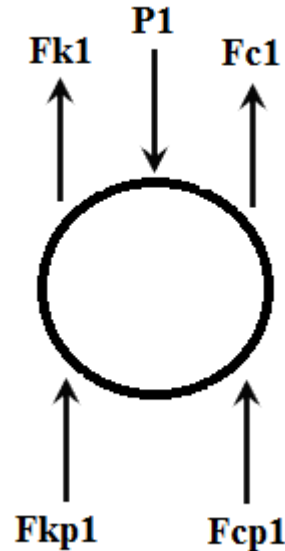


Figura 36 - Diagrama do corpo livre em equilíbrio estático da massa não suspensa da frente do lado esquerdo – roda 1.

Onde:

- $F_{k1}$  = Força da mola da roda da frente do lado esquerdo;
- $P_1$  = Peso da massa não suspensa da roda da frente do lado esquerdo;
- $F_{c1}$  = Força do amortecedor da roda da frente do lado esquerdo;
- $F_{kp1}$  = Força de rigidez do pneu da roda da frente do lado esquerdo;
- $F_{cp1}$  = Força de amortecimento do pneu da roda da frente do lado esquerdo.

Foi definido o somatório das forças (Equação 12) ao qual foi aplicado a segunda lei de Newton na Equação 13:

$$\sum F_{z1} = F_{c1} + F_{k1} + F_{kp1} + F_{cp1} - P_1 \quad \text{Equação 12}$$

$$m_1 \times \ddot{Z}_1 = F_{c1} + F_{k1} + F_{kp1} + F_{cp1} - P_1 \quad \text{Equação 13}$$

Onde:

- $m_1$  = Massa não suspensa da roda da frente do lado esquerdo;
- $\ddot{Z}_1$  = Aceleração vertical da roda da frente do lado esquerdo.

De seguida, foi feito o diagrama de corpo livre da massa suspensa, como se pode ver na Figura 37 (vista lateral do lado esquerdo do monolugar) e criadas as respetivas equações. Na Figura 37 apenas são representadas as forças relativas à suspensão das rodas 1 e 3, referentes ao lado esquerdo do veículo automóvel; contudo, nas equações foram consideradas as 4 rodas.

As forças devido ao *downforce* ( $F_{Dd}$ ,  $F_{Dc}$  e  $F_{Dt}$ ) só existem quando o carro está em movimento, ou quando está muito vento (fator que não foi considerado). No entanto foram consideradas para que o modelo matemático pudesse servir para os diferentes casos: transferência de massa lateral, longitudinal ou a combinação de ambas. No equilíbrio estático o valor das forças  $F_{Dd}$ ,  $F_{Dc}$  e  $F_{Dt}$  foram considerados nulos.

Onde:

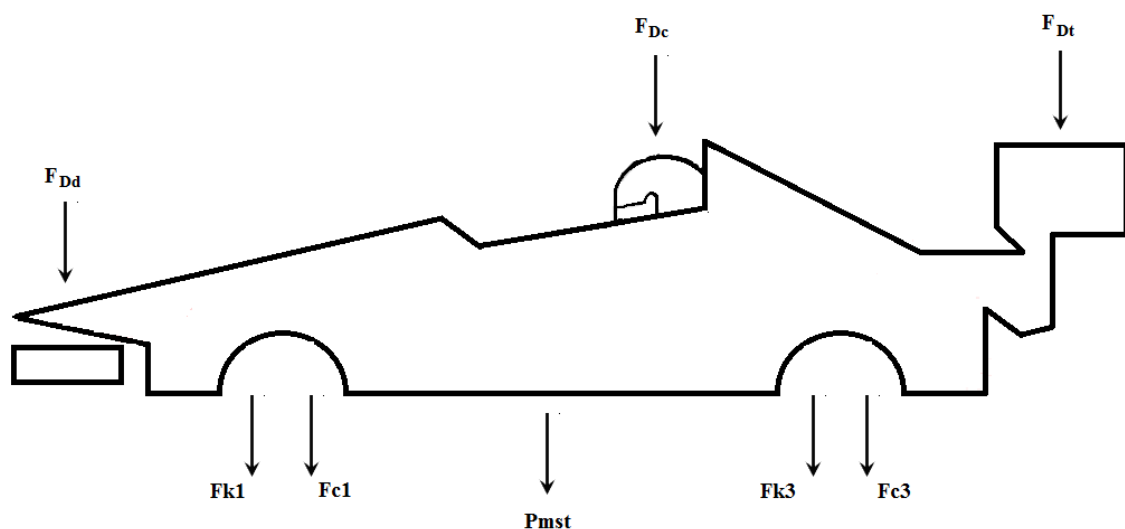


Figura 37 - Diagrama do corpo livre em equilíbrio estático da massa suspensa.

- $F_{Dd}$  = *Downforce* na asa dianteira;
- $F_{Dc}$  = *Downforce* do corpo;
- $F_{Dt}$  = *Downforce* na asa traseira;
- $P_{mst}$  = Peso da massa suspensa total<sup>5</sup>;

<sup>5</sup> Soma do peso da massa suspensa (veículo) com o peso do condutor



O somatório das forças da massa suspensa é dado por:

$$\sum F_z = -\sum_{i=1}^4 F_{ci} - \sum_{i=1}^4 F_{ki} - F_{Dd} - F_{Dc} - F_{Dt} - P_{mst} \quad \text{Equação 14}$$

Aplicando à Equação 14 a 2ª lei de Newton:

$$m_{st} \times \ddot{Z}_{mst} = -\sum_{i=1}^4 F_{ci} - \sum_{i=1}^4 F_{ki} - F_{Dd} - F_{Dc} - F_{Dt} - P_{mst} \quad \text{Equação 15}$$

Onde:

- $m_{st}$  = Massa suspensa total;
- $\ddot{Z}_{mst}$  = Aceleração vertical da massa suspensa total.

Nota:

Os índices 1 e A são relativos à roda da frente do lado esquerdo;

Os índices 2 e B são relativos à roda da frente do lado direito;

Os índices 3 e C são relativos à roda de trás do lado esquerdo;

Os índices 4 e D são relativos à roda da frente do lado direito.

Considerando os pontos A, B, C e D como pontos de ligação das molas e amortecedores à estrutura do veículo automóvel, as forças podem ser escritas como:

$$F_{k1} = k_1 \times (Z_A - Z_1) \quad \text{Equação 16}$$

$$F_{c1} = c_1 \times (\dot{Z}_A - \dot{Z}_1) \quad \text{Equação 17}$$

$$F_{kp1} = k_{p1} \times (0 - Z_1) = -k_{p1} \times Z_1 \quad \text{Equação 18}$$

$$F_{cp1} = c_{p1} \times (0 - \dot{Z}_1) = -c_{p1} \times \dot{Z}_1 \quad \text{Equação 19}$$

$$P_1 = g \times m_1 \quad \text{Equação 20}$$

$$F_{k2} = k_2 \times (Z_B - Z_2) \quad \text{Equação 21}$$

$$F_{c2} = c_2 \times (\dot{Z}_B - \dot{Z}_2) \quad \text{Equação 22}$$

$$F_{kp2} = k_{p2} \times (0 - Z_2) = -k_{p2} \times Z_2 \quad \text{Equação 23}$$

$$F_{cp2} = c_{p2} \times (0 - \dot{Z}_2) = -c_{p2} \times \dot{Z}_2$$

Equação 24

$$P_2 = g \times m_2$$

Equação 25

$$F_{k3} = k_3 \times (Z_C - Z_3)$$

Equação 26

$$F_{c3} = c_3 \times (\dot{Z}_C - \dot{Z}_3)$$

Equação 27

$$F_{kp3} = k_{p3} \times (0 - Z_3) = -k_{p3} \times Z_3$$

Equação 28

$$F_{cp3} = c_{p3} \times (0 - \dot{Z}_3) = -c_{p3} \times \dot{Z}_3$$

Equação 29

$$P_3 = g \times m_3$$

Equação 30

$$F_{k4} = k_4 \times (Z_D - Z_4)$$

Equação 31

$$F_{c4} = c_4 \times (\dot{Z}_D - \dot{Z}_4)$$

Equação 32

$$F_{kp4} = k_{p4} \times (0 - Z_4) = -k_{p4} \times Z_4$$

Equação 33

$$F_{cp4} = c_{p4} \times (0 - \dot{Z}_4) = -c_{p4} \times \dot{Z}_4$$

Equação 34

$$P_4 = g \times m_4$$

Equação 35

$$P_{mst} = g \times m_{st}$$

Equação 36

$$F_{Dd} = Perc\_downforce\_frente \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}$$

Equação 37

$$F_{Dc} = Perc\_downforce\_corpo \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}$$

Equação 38

$$F_{Dt} = Perc\_downforce\_trás \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}$$

Equação 39

### 3.2 Transferências de massa laterais

Nas transferências de massa laterais estão em jogo 7 graus de liberdade. Para efeitos de cálculo, apenas foram considerados 4 graus de liberdade:

- Rotação lateral (*roll*);
- Deslocamento vertical da carroçaria (massa suspensa);
- Deslocamento vertical do par de rodas dianteiras (em vez das 4 rodas).

A Figura 38 representa o diagrama do corpo livre para uma variação no sentido positivo da rotação lateral.

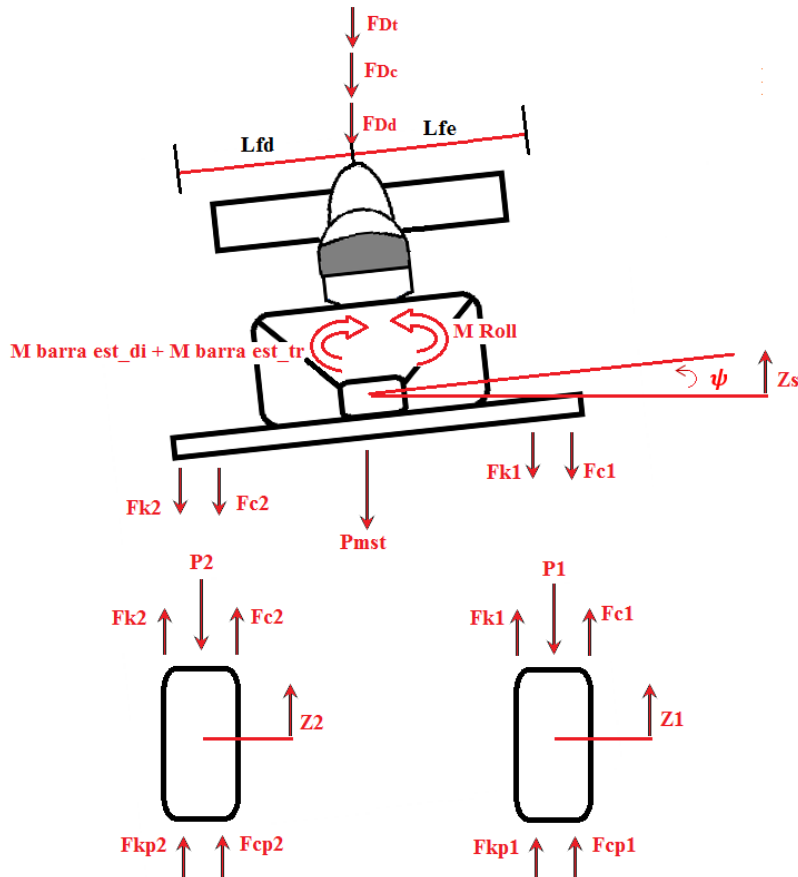


Figura 38 - Diagrama do corpo livre com transferência de massa lateral (vista frontal).

Onde:

- $\psi$  = Ângulo de *roll* - rotação do carro segundo a longitudinal do veículo automóvel (com sentido positivo para a frente deste);
- $M_{\text{roll}}$  = Momento de rotação do carro segundo  $\psi$ ;
- $M_{\text{barra est di}}$  = Momento da barra estabilizadora dianteira segundo  $\psi$ ;
- $M_{\text{barra est tr}}$  = Momento da barra estabilizadora traseira segundo  $\psi$ ;
- $L_{fe}$  = Distância entre o eixo longitudinal e a roda dianteira esquerda;
- $L_{fd}$  = Distância entre o eixo longitudinal e a roda dianteira direita;

Com os 4 graus de liberdade, foi possível obter as seguintes equações:

$$m_1 \times \ddot{Z}_1 = \sum F_{z1} \quad \text{Equação 40}$$

$$m_2 \times \ddot{Z}_2 = \sum F_{z2} \quad \text{Equação 41}$$

$$m_{st} \times \ddot{Z}_{st} = \sum F_{zs} \quad \text{Equação 42}$$

$$I_x \times \ddot{\psi} = \sum M_x \quad \text{Equação 43}$$

Onde:

- $I_x$  = Momento de inércia segundo o eixo XX.

Onde os somatórios das forças das rodas (massas não suspensas) são dados por:

$$\sum F_{z1} = F_{c1} + F_{k1} + F_{kp1} + F_{cp1} - P_1 \quad \text{Equação 44}$$

$$\sum F_{z2} = F_{c2} + F_{k2} + F_{kp2} + F_{cp2} - P_2 \quad \text{Equação 45}$$

Através da 2ª lei de Newton, a Equação 44 e a Equação 45 podem ser escritas da seguinte maneira:

$$m_1 \times \ddot{Z}_1 = F_{c1} + F_{k1} + F_{kp1} + F_{cp1} - P_1 \quad \text{Equação 46}$$

$$m_2 \times \ddot{Z}_2 = F_{c2} + F_{k2} + F_{kp2} + F_{cp2} - P_2 \quad \text{Equação 47}$$

Devido ao deslocamento angular imposto, os pontos A e B podem ser calculados da seguinte forma:

$$Z_A = Z_S + L_{fe} \sin \psi \quad \text{Equação 48}$$

$$Z_B = Z_S - L_{fd} \sin \psi \quad \text{Equação 49}$$

Considerando a variação do ângulo pequena e fazendo uma aproximação usando uma série de Taylor: (Rodrigues 2012)

$$\sin \psi = \psi \quad \text{Equação 50}$$

Logo a Equação 48 e a Equação 49 podem ser escritas por:

$$Z_A = Z_S + L_{fe} \times \psi \quad \text{Equação 51}$$

$$Z_B = Z_S - L_{fd} \times \psi$$

Equação 52

Sendo as suas derivadas definidas por:

$$\dot{Z}_A = \dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi}$$

Equação 53

$$\dot{Z}_B = \dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi}$$

Equação 54

Portanto as forças da suspensão definidas anteriormente (Equação 16, Equação 17, Equação 21 e Equação 22) podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$F_{k1} = k_1 \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - Z_1)$$

Equação 55

$$F_{c1} = c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - \dot{Z}_1)$$

Equação 56

$$F_{k2} = k_2 \times (Z_S - L_{fd} \times \psi - Z_2)$$

Equação 57

$$F_{c2} = c_2 \times (\dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - \dot{Z}_2)$$

Equação 58

Na transferência de massa lateral existem dois momentos devidos às barras estabilizadoras (aplicação da equação da Figura 10 a cada barra estabilizadora - Equação 59 e Equação 60) e o momento de *roll* (Equação 6) que foram a seguir definidos:

- Momento da barra estabilizadora traseira:

$$M_{barra\ est\ tr} = \frac{500000 \times D_{tr}^4}{0.4244 \times A_{tr}^2 \times B_{tr} + 0.2264 \times C_{tr}^3} \times \psi$$

Equação 59

- Momento da barra estabilizadora dianteira:

$$M_{barra\ est\ di} = \frac{500000 \times D_{di}^4}{0.4244 \times A_{di}^2 \times B_{di} + 0.2264 \times C_{di}^3} \times \psi$$

Equação 60

- Momento de *roll*:

$$M_{roll} = m_{st} \times a_y \times h_{cg}$$

Equação 6

Substituindo o valor das forças nas equações iniciais do movimento (Equação 46 e Equação 47), têm-se:

$$m_1 \times \ddot{Z}_1 = c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - \dot{Z}_1) + k_1 \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - Z_1) + (-k_{p1} \times Z_1) + (-c_{p1} \times \dot{Z}_1) - (g \times m_1)$$

Equação 61

$$m_2 \times \ddot{Z}_2 = c_2 \times (\dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - \dot{Z}_2) + k_2 \times (Z_S - L_{fd} \times \psi - Z_2) + (-k_{p2} \times Z_2) + (-c_{p2} \times \dot{Z}_2) - (g \times m_2)$$

Equação 62

Aplicando o processo anterior à massa suspensa, o somatório das forças é dado por:

$$\sum F_{zmst} = -F_{c1} - F_{c2} - F_{k1} - F_{k2} - F_{Dd} - F_{Dc} - F_{Dt} - P_{mst}$$

Equação 63

Através da 2ª lei de Newton, a Equação 63 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$m_{st} \times \ddot{Z}_{mst} = -F_{c1} - F_{c2} - F_{k1} - F_{k2} - F_{Dd} - F_{Dc} - F_{Dt} - P_{mst}$$

Equação 64

Substituindo as forças, a equação anterior pode ser escrita:

$$m_{st} \times \ddot{Z}_{mst} = -c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - \dot{Z}_1) - c_2 \times (\dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - \dot{Z}_2) - k_1 \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - Z_1) - k_2 \times (Z_S - L_{fd} \times \psi - Z_2) - (Perc\_downforce\_frente \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}) - (Perc\_downforce\_corpo \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}) - (Perc\_downforce\_traseira \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}) - (g \times m_{st})$$

Equação 65

Para o sistema ficar completo uma vez que foram considerados graus de liberdade, falta uma equação que foi obtida através do somatório de momentos da massa suspensa.

$$I_x \times \ddot{\psi} = L_{fd} \times [F_{k2} + F_{c2}] - L_{fe} \times [F_{k1} + F_{c1}] + M_{roll} - M_{barra\ est\ di} - M_{barra\ est\ tr}$$

Equação 66

Substituindo as forças:

$$I_x \times \ddot{\psi} = L_{fd} \times [k_2 \times (Z_S - L_{fd} \times \psi - Z_2) + c_2 \times (\dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - \dot{Z}_2)] - L_{fe} \times [k_1 \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - Z_1) + c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - \dot{Z}_1)] + (m_{st} \times a_y \times h_{cg}) - \left( \frac{500000 \times D_{di}^4}{(0.4244 \times A_{di}^2 \times B_{di} + 0.2264 \times C_{di}^3)} \times \psi \right) - \left( \frac{500000 \times D_{tr}^4}{(0.4244 \times A_{tr}^2 \times B_{tr} + 0.2264 \times C_{tr}^3)} \times \psi \right)$$

Equação 67

### 3.3 Transferências de massa longitudinal

De maneira análoga à transferência de massa lateral, apenas foram considerados 4 dos 7 graus de liberdade, sendo estes:

- Rotação longitudinal (*pitch*);
- Deslocamento vertical da carroçaria (massa suspensa);
- Deslocamento vertical do par de rodas do lado esquerdo (em vez das 4 rodas).

A Figura 39 representa o diagrama do corpo livre para uma variação no sentido positivo da rotação longitudinal.

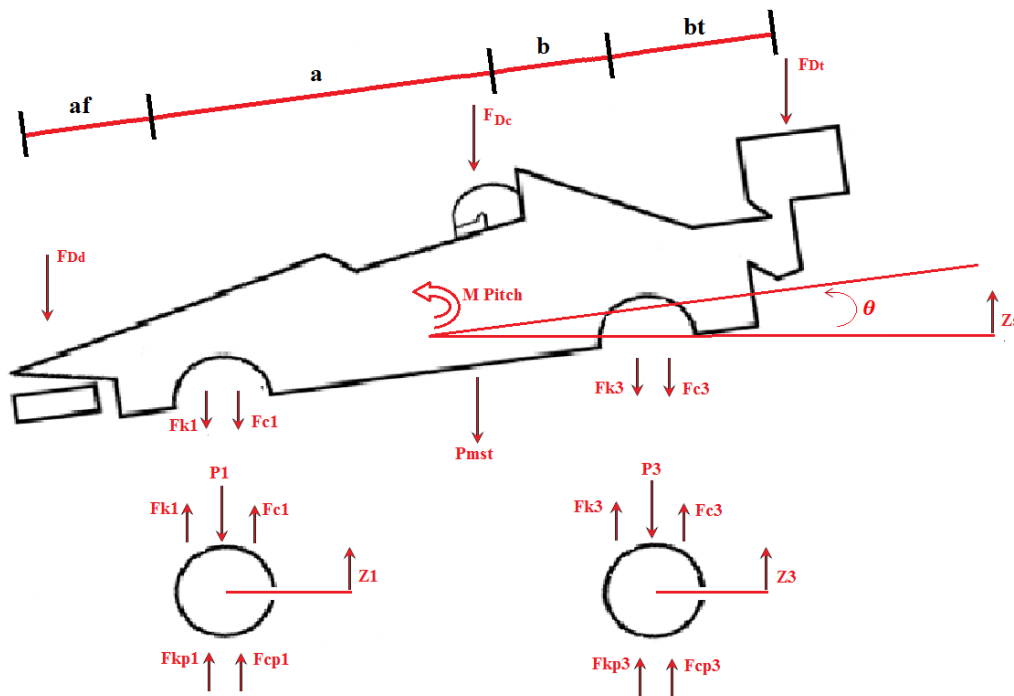


Figura 39 - Diagrama do corpo livre com transferência de massa longitudinal (vista lado esquerdo).

Onde:

- $\theta$  = Ângulo de *pitch* - rotação do carro segundo a transversal do veículo automóvel (com sentido positivo para a esquerda deste);
- $M_{pitch}$  = Momento de rotação do carro segundo  $\theta$ ;
- $a$  = Distância entre o centro de gravidade e o eixo dianteiro;
- $b$  = Distância entre o centro de gravidade e o eixo traseiro;
- $a_f$  = Distância do eixo dianteiro à asa frontal
- $b_t$  = Distância do eixo traseiro à asa traseira

Com os 4 graus de liberdade, foi possível obter as seguintes equações:

$$m_1 \times \ddot{Z}_1 = \sum F_{z1} \quad \text{Equação 68}$$

$$m_3 \times \ddot{Z}_3 = \sum F_{z3} \quad \text{Equação 69}$$

$$m_{st} \times \ddot{Z}_{st} = \sum F_{zs} \quad \text{Equação 70}$$

$$I_y \times \ddot{\theta} = \sum M_y \quad \text{Equação 71}$$

Onde:

- $I_y$  = Momento de inércia segundo o eixo YY.

Os somatórios das forças das rodas (massas não suspensas) são dados por:

$$\sum F_{z1} = F_{c1} + F_{k1} + F_{kp1} + F_{cp1} - P_1 \quad \text{Equação 72}$$

$$\sum F_{z3} = F_{c3} + F_{k3} + F_{kp3} + F_{cp3} - P_3 \quad \text{Equação 73}$$

Através da 2ª lei de Newton, a Equação 72 e a Equação 73 podem ser escritas da seguinte forma:

$$m_1 \times \ddot{Z}_1 = F_{c1} + F_{k1} + F_{kp1} + F_{cp1} - P_1 \quad \text{Equação 74}$$

$$m_3 \times \ddot{Z}_3 = F_{c3} + F_{k3} + F_{kp3} + F_{cp3} - P_3 \quad \text{Equação 75}$$

Devido ao deslocamento angular imposto, os pontos A e C, podem ser calculados da seguinte maneira:

$$Z_A = Z_S - a \times \sin \theta \quad \text{Equação 76}$$

$$Z_C = Z_S + b \times \sin \theta \quad \text{Equação 77}$$

Considerando a variação do ângulo pequena e fazendo uma aproximação usando uma série de Taylor: (Rodrigues 2012)

$$\sin \theta = \theta \quad \text{Equação 78}$$

Logo a Equação 76 e a Equação 77 podem ser escritas por:

$$Z_A = Z_S - a \times \theta \quad \text{Equação 79}$$

$$Z_C = Z_S + b \times \theta \quad \text{Equação 80}$$



Sendo as suas derivadas definidas por:

$$\dot{Z}_A = \dot{Z}_S - a \times \dot{\theta} \quad \text{Equação 81}$$

$$\dot{Z}_C = \dot{Z}_S + b \times \dot{\theta} \quad \text{Equação 82}$$

Portanto as forças da suspensão definidas anteriormente (Equação 16, Equação 17, Equação 26 e Equação 27) podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$F_{k1} = k_1 \times (Z_S - a \times \theta - Z_1) \quad \text{Equação 83}$$

$$F_{c1} = c_1 \times (\dot{Z}_S - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_1) \quad \text{Equação 84}$$

$$F_{k3} = k_3 \times (Z_S + b \times \theta - Z_3) \quad \text{Equação 85}$$

$$F_{c3} = c_3 \times (\dot{Z}_S + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_3) \quad \text{Equação 86}$$

Na transferência de massa longitudinal existe o momento de *pitch* (Equação 7) que foi a seguir definido:

$$M_{pitch} = m_{st} \times a_x \times h_{cg} \quad \text{Equação 7}$$

Logo, substituindo o valor das forças nas equações iniciais do movimento (Equação 74 e Equação 75), têm-se:

$$m_1 \times \ddot{Z}_1 = c_1 \times (\dot{Z}_S - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_1) + k_1 \times (Z_S - a \times \theta - Z_1) + (-k_{p1} \times Z_1) + (-c_{p1} \times \dot{Z}_1) - (g \times m_1) \quad \text{Equação 87}$$

$$m_3 \times \ddot{Z}_3 = c_3 \times (\dot{Z}_S + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_3) + k_3 \times (Z_S + b \times \theta - Z_3) + (-k_{p3} \times Z_3) + (-c_{p3} \times \dot{Z}_3) - (g \times m_3) \quad \text{Equação 88}$$

Aplicando o processo anterior à massa suspensa, o somatório das forças é dado por:

$$\sum F_{zmst} = -F_{c1} - F_{c3} - F_{k1} - F_{k3} - F_{Dd} - F_{Dc} - F_{Dt} - P_{mst} \quad \text{Equação 89}$$

Através da 2ª lei de Newton, a Equação 89 pode ser escrita da seguinte forma:

$$m_{st} \times \ddot{Z}_{mst} = -F_{c1} - F_{c3} - F_{k1} - F_{k3} - F_{Dd} - F_{Dc} - F_{Dt} - P_{mst}$$

Equação 90

Substituindo as forças, a equação anterior pode ser escrita:

$$m_{st} \times \ddot{Z}_{mst} = -c_1 \times (\dot{Z}_S - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_1) - c_3 \times (\dot{Z}_S + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_3) - k_1 \times (Z_S - a \times \theta - Z_1) - k_3 \times (Z_S + b \times \theta - Z_3) - (Perc\_downforce\_frente \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}) - (Perc\_downforce\_corpo \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}) - (Perc\_downforce\_trás \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}) - (g \times m_{st})$$

Equação 91

Para o sistema ficar completo, falta uma equação que foi obtida através do somatório de momentos da massa suspensa.

$$I_y \times \ddot{\theta} = a \times [F_{k1} + F_{c1}] + (a + a_f) \times F_{Dd} - b \times [F_{k3} + F_{c3}] - (b + b_t) \times F_{Dt} + M_{pitch}$$

Equação 92

Substituindo:

$$I_y \times \ddot{\theta} = a \times [k_1 \times (Z_S - a \times \theta - Z_1) + c_1 \times (\dot{Z}_S - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_1)] + (a + a_f) \times (Perc\_downforce\_frente \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}) - b \times [k_3 \times (Z_S + b \times \theta - Z_3) + c_3 \times (\dot{Z}_S + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_3)] - (b + b_t) \times (Perc\_downforce\_trás \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}) + (m_{st} \times a_x \times h_{cg})$$

Equação 93

### 3.4 Modelo matemático final

O modelo matemático final foi obtido pela aplicação das metodologias usadas na obtenção das equações das transferências de massa (tanto longitudinal como lateral), ou seja, uma combinação da Figura 38 (transferência de massa lateral) com a Figura 39 (transferência de massa longitudinal).

É de salientar que apesar de em cada figura referida apenas se encontrar representado um par de rodas, no modelo matemático final foram consideradas as forças presentes em todas as rodas do monolugar.

No modelo final, para efeito de cálculo, foram considerados os 7 graus de liberdade:

- Deslocamento vertical da carroçaria (massa suspensa);
- Deslocamento vertical das 4 rodas (massas não suspensas);
- Rotação lateral (*roll*);
- Rotação longitudinal (*pitch*);

Aplicando a 2ª lei de Newton aos 7 graus de liberdade, foi possível obter as seguintes equações:

$$m_1 \times \ddot{Z}_1 = \sum F_{z1} \quad \text{Equação 94}$$

$$m_2 \times \ddot{Z}_2 = \sum F_{z2} \quad \text{Equação 95}$$

$$m_3 \times \ddot{Z}_3 = \sum F_{z3} \quad \text{Equação 96}$$

$$m_4 \times \ddot{Z}_4 = \sum F_{z4} \quad \text{Equação 97}$$

$$m_{st} \times \ddot{Z}_{st} = \sum F_{zs} \quad \text{Equação 98}$$

$$I_x \times \ddot{\psi} = \sum M_x \quad \text{Equação 99}$$

$$I_y \times \ddot{\theta} = \sum M_y \quad \text{Equação 100}$$

Substituindo o somatório de forças das massas não suspensas e suspensa, desde a Equação 94 à Equação 98, fica:

$$m_1 \times \ddot{Z}_1 = F_{c1} + F_{k1} + F_{kp1} + F_{cp1} - P_1 \quad \text{Equação 101}$$

$$m_2 \times \ddot{Z}_2 = F_{c2} + F_{k2} + F_{kp2} + F_{cp2} - P_2 \quad \text{Equação 102}$$

$$m_3 \times \ddot{Z}_3 = F_{c3} + F_{k3} + F_{kp3} + F_{cp3} - P_3 \quad \text{Equação 103}$$

$$m_4 \times \ddot{Z}_4 = F_{c4} + F_{k4} + F_{kp4} + F_{cp4} - P_4 \quad \text{Equação 104}$$

$$m_{st} \times \ddot{Z}_{mst} = -F_{c1} - F_{c2} - F_{c3} - F_{c4} - \frac{F_{k1} - F_{k2} - F_{k3} - F_{k4} - F_{Dd} - F_{Dc} - F_{Dt} - P_{mst}}{P_{mst}}$$

Equação 105

Para o modelo final,  $Z_A$ ,  $Z_B$ ,  $Z_C$  e  $Z_D$  são representados por:

$$Z_A = Z_S + L_{fe} \times \psi - a \times \theta$$

Equação 106

$$Z_B = Z_S - L_{fd} \times \psi - a \times \theta$$

Equação 107

$$Z_C = Z_S + L_{te} \times \psi + b \times \theta$$

Equação 108

$$Z_D = Z_S - L_{td} \times \psi + b \times \theta$$

Equação 109

Onde:

- $L_{te}$  = Distância entre o eixo longitudinal e a roda traseira esquerda;
- $L_{td}$  = Distância entre o eixo longitudinal e a roda traseira direita;

Sendo as suas derivadas definidas por:

$$\dot{Z}_A = \dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta}$$

Equação 110

$$\dot{Z}_B = \dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta}$$

Equação 111

$$\dot{Z}_C = \dot{Z}_S + L_{te} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta}$$

Equação 112

$$\dot{Z}_D = \dot{Z}_S - L_{td} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta}$$

Equação 113

As forças das molas e dos amortecedores da suspensão são dadas por:

$$F_{k1} = k_1 \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - a \times \theta - Z_1)$$

Equação 114

$$F_{c1} = c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_1)$$

Equação 115

$$F_{k2} = k_2 \times (Z_S - L_{fd} \times \psi - a \times \theta - Z_2)$$

Equação 116

$$F_{c2} = c_2 \times (\dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_2)$$

Equação 117

$$F_{k3} = k_3 \times (Z_S + L_{te} \times \psi + b \times \theta - Z_3)$$

Equação 118

$$F_{c3} = c_3 \times (\dot{Z}_S + L_{te} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_3)$$

Equação 119

$$F_{k4} = k_4 \times (Z_S - L_{td} \times \psi + b \times \theta - Z_4)$$

Equação 120

$$F_{c4} = c_4 \times (\dot{Z}_S - L_{td} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_4)$$

Equação 121

Relativamente às equações obtidas através dos 2 momentos de rotação (Equação 99 e Equação 100), consegue-se:

$$I_x \times \ddot{\psi} = L_{fd} \times [F_{k2} + F_{c2}] + L_{td} \times [F_{k4} + F_{c4}] - L_{fe} \times [F_{k1} + F_{c1}] - L_{te} \times [F_{k3} + F_{c3}] + M_{roll} - M_{barra\ est\ di} - M_{barra\ est\ tr}$$

Equação 122

$$I_y \times \ddot{\theta} = a \times [F_{k1} + F_{c1}] + a \times [F_{k2} + F_{c2}] + (a + a_f) \times F_{Dd} - b \times [F_{k3} + F_{c3}] - b \times [F_{k4} + F_{c4}] - (b + b_t) \times F_{Dt} + M_{pitch}$$

Equação 123

Substituindo as expressões das forças desde a Equação 101 à Equação 105 e as expressões dos momentos: Equação 122 e Equação 123, obtemos o modelo final para o equilíbrio dinâmico do monolugar:

$$m_1 \times \ddot{Z}_1 = c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_1) + k_1 \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - a \times \theta - Z_1) + (-k_{p1} \times Z_1) + (-c_{p1} \times \dot{Z}_1) - (g \times m_1)$$

Equação 124

$$m_2 \times \ddot{Z}_2 = c_2 \times (\dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_2) + k_2 \times (Z_S - L_{fd} \times \psi - a \times \theta - Z_2) + (-k_{p2} \times Z_2) + (-c_{p2} \times \dot{Z}_2) - (g \times m_2)$$

Equação 125

$$m_3 \times \ddot{Z}_3 = c_3 \times (\dot{Z}_S + L_{te} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_3) + k_3 \times (Z_S + L_{te} \times \psi + b \times \theta - Z_3) + (-k_{p3} \times Z_3) + (-c_{p3} \times \dot{Z}_3) - (g \times m_3)$$

Equação 126

$$m_4 \times \ddot{Z}_4 = c_4 \times (\dot{Z}_S - L_{td} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_4) + k_4 \times (Z_S - L_{td} \times \psi + b \times \theta - Z_4) + (-k_{p4} \times Z_4) + (-c_{p4} \times \dot{Z}_4) - (g \times m_4)$$

Equação 127

$$\begin{aligned}
 m_{st} \times \ddot{Z}_{mst} = & -c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_1) - c_2 \times (\dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \\
 & \dot{Z}_2) - c_3 \times (\dot{Z}_S + L_{te} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_3) - c_4 \times (\dot{Z}_S - L_{td} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_4) - k_1 \times \\
 & (Z_S + L_{fe} \times \psi - a \times \theta - Z_1) - k_2 \times (Z_S - L_{fd} \times \psi - a \times \theta - Z_2) - k_3 \times \\
 & (Z_S + L_{te} \times \psi + b \times \theta - Z_3) - k_4 \times (Z_S - L_{td} \times \psi + b \times \theta - Z_4) - \\
 & (Perc\_downforce\_frente \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G" }) - (Perc\_downforce\_corpo \times \\
 & m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G" }) - (Perc\_downforce\_trás \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G" }) - \\
 & (g \times m_{st})
 \end{aligned}$$

Equação 128

$$\begin{aligned}
 I_x \times \ddot{\psi} = & L_{fd} \times [k_2 \times (Z_S - L_{fd} \times \psi - a \times \theta - Z_2) + c_2 \times (\dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - a \times \\
 & \dot{\theta} - \dot{Z}_2)] + L_{td} \times [k_4 \times (Z_S - L_{td} \times \psi + b \times \theta - Z_4) + c_4 \times (\dot{Z}_S - L_{td} \times \dot{\psi} + b \times \\
 & \dot{\theta} - \dot{Z}_4)] - L_{fe} \times [k_1 \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - a \times \theta - Z_1) + c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - a \times \\
 & \dot{\theta} - \dot{Z}_1)] - L_{te} \times [k_3 \times (Z_S + L_{te} \times \psi + b \times \theta - Z_3) + c_3 \times (\dot{Z}_S + L_{te} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \\
 & \dot{Z}_3)] + (m_{st} \times a_y \times h_{cg}) - \left( \frac{500000 \times D_{di}^4}{0.4244 \times A_{di}^2 \times B_{di} + 0.2264 \times C_{di}^3} \times \psi \right) - \\
 & \left( \frac{500000 \times D_{tr}^4}{0.4244 \times A_{tr}^2 \times B_{tr} + 0.2264 \times C_{tr}^3} \times \psi \right)
 \end{aligned}$$

Equação 129

$$\begin{aligned}
 I_y \times \ddot{\theta} = & a \times [k_1 \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - a \times \theta - Z_1) + c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \\
 & \dot{Z}_1)] + a \times [k_2 \times (Z_S - L_{fd} \times \psi - a \times \theta - Z_2) + c_2 \times (\dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \\
 & \dot{Z}_2)] + (a + a_f) \times (Perc\_downforce\_frente \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G" }) - b \times \\
 & [k_3 \times (Z_S + L_{te} \times \psi + b \times \theta - Z_3) + c_3 \times (\dot{Z}_S + L_{te} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_3)] - b \times \\
 & [k_4 \times (Z_S - L_{td} \times \psi + b \times \theta - Z_4) + c_4 \times (\dot{Z}_S - L_{td} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_4)] - (b + \\
 & b_t) \times (Perc\_downforce\_trás \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G" }) + (m_{st} \times a_x \times h_{cg})
 \end{aligned}$$

Equação 130

## 4 Software MATLAB® - Simulink®

*“Simulink® is a block diagram environment for multidomain simulation and Model-Based Design. It supports system-level design, simulation, automatic code generation, and continuous test and verification of embedded systems.*

*Simulink® provides a graphical editor, customizable block libraries, and solvers for modeling and simulating dynamic systems. It is integrated with MATLAB®, enabling you to incorporate MATLAB® algorithms into models and export simulation results to MATLAB® for further analysis.”* (Simulink®)

Por ser um *software* utilizado para simular sistemas dinâmicos, a ferramenta do MATLAB® utilizada para construir o modelo matemático apresentado no capítulo 3 foi o Simulink®.

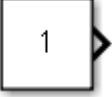
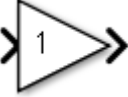



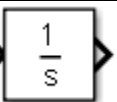
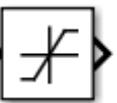
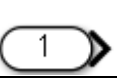
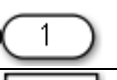


Com o Simulink® foi possível dividir o modelo matemático em vários blocos, permitindo que este fosse mais perceptível. Para além desta vantagem, permitiu modificar os parâmetros e observar imediatamente os resultados obtidos nas simulações.

#### 4.1 Simbologia utilizada

Como referido anteriormente, o Simulink® utiliza uma interface de blocos, ao contrário do MATLAB® que utiliza linhas de comando.

Os blocos utilizados na criação do programa estão representados na Tabela 1:

Tabela 1 - Blocos utilizados no Simulink®. (Simulink®)

Símbolo	Nome do bloco	Aplicação
	<i>Constant</i>	Gera um valor constante
	<i>Gain</i>	Multiplica o sinal por um determinado valor (ganho)
	<i>Sum</i>	Soma ou subtrai as várias entradas
	<i>Product</i>	Multiplica as várias entradas
	<i>Divide</i>	Inverte o sinal de entrada
	<i>Integrator</i>	Integra um sinal
	<i>Saturation</i>	Limita a amplitude de um sinal
	<i>In</i>	Cria uma porta de ligação do exterior para o sistema
	<i>Out</i>	Cria uma porta de ligação do sistema para o exterior
	<i>Scope</i>	Exibe sinais gerados durante uma simulação
	<i>Subsystem</i>	Criação de um sistema dentro de outro



## 4.2 Implementação do modelo

Tendo o modelo matemático final com os sete graus de liberdade criado no capítulo 3.4 (Modelo matemático final) e com a utilização dos blocos apresentados na Tabela 1, foi possível expor as equações de uma forma simplificada.

Para resolver as equações num sistema de blocos, é necessário, inicialmente, obter a equação em ordem à maior derivada. Para melhor ilustrar este procedimento temos como exemplo, o **movimento vertical da roda 1** (frente do lado esquerdo). Neste caso, a maior derivada será  $\ddot{Z}_1$  que representa a aceleração vertical da roda da frente do lado esquerdo. Para a continuação do trabalho foi necessário definir a velocidade e o deslocamento da roda,  $\dot{Z}_1$  e  $Z_1$ , respetivamente. Estes parâmetros foram obtidos através da utilização do bloco *integrator* referido na Tabela 1 que procede à integração do sinal de entrada, neste caso  $\ddot{Z}_1$ , obtendo assim  $\dot{Z}_1$  e integrando novamente obtivemos  $Z_1$ .

Em vez de se utilizar a expressão complexa apresentada anteriormente na Equação 124:

$$m_1 \times \ddot{Z}_1 = c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_1) + k_1 \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - a \times \theta - Z_1) + (-k_{p1} \times Z_1) + (-c_{p1} \times \dot{Z}_1) - (g \times m_1)$$

Equação 124

Utilizou-se a equação simplificada exposta anteriormente na Equação 101, que permite construir o programa com subsistemas, tornando-o mais simples:

$$m_1 \times \ddot{Z}_1 = F_{c1} + F_{k1} + F_{kp1} + F_{cp1} - P_1$$

Equação 101

Resolvida em ordem à maior derivada:

$$\ddot{Z}_1 = 1/m_1 \times [F_{c1} + F_{k1} + F_{kp1} + F_{cp1} - P_1]$$

Equação 131

Em que as forças presentes na Equação 131 são dadas pelas expressões previamente apresentadas:

$$F_{kp1} = k_{p1} \times (0 - Z_1) = -k_{p1} \times Z_1$$

Equação 18

$$F_{cp1} = c_{p1} \times (0 - \dot{Z}_1) = -c_{p1} \times \dot{Z}_1$$

Equação 19

$$P_1 = g \times m_1$$

Equação 20

$$F_{k1} = k_1 \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - a \times \theta - Z_1)$$

Equação 114

$$F_{c1} = c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_1)$$

Equação 115

Para caracterizar as várias forças enunciadas anteriormente, construíram-se subsistemas apresentados da Figura 40 à Figura 43:

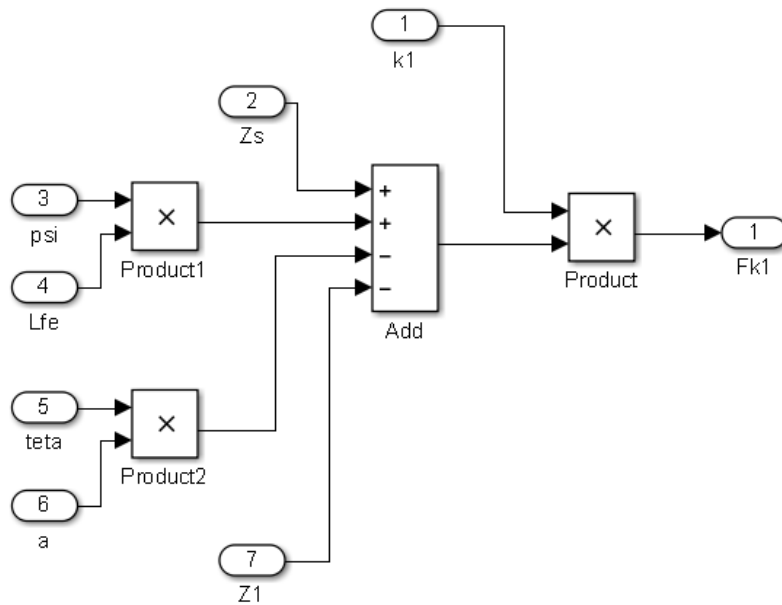


Figura 40 - Subsistema força da mola da roda 1 - Fk1

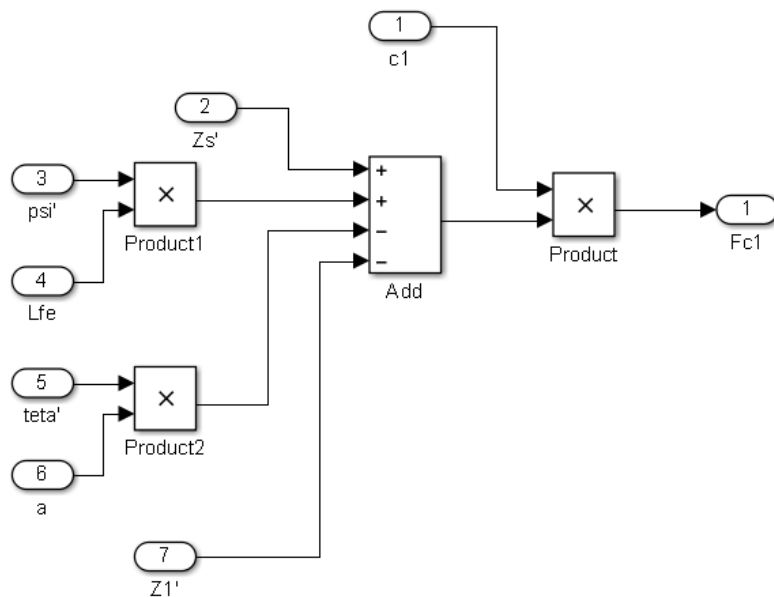


Figura 41 - Subsistema força de amortecimento da roda 1 - Fc1

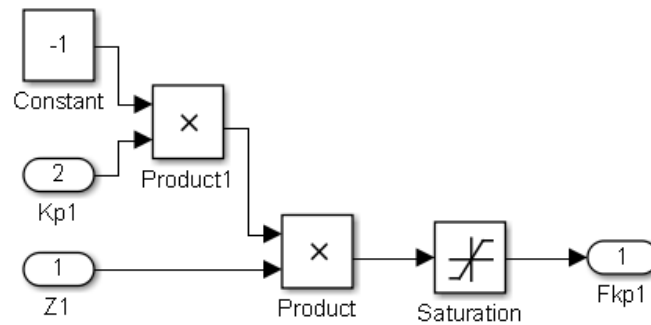


Figura 42 - Subsistema força de rigidez do pneu da roda 1 - Fkp1

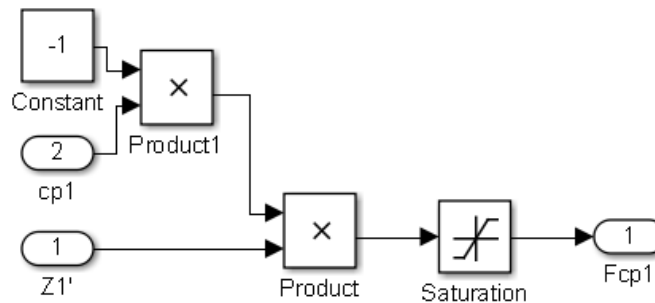


Figura 43 - Subsistema força de amortecimento do pneu da roda 1 - Fcp1

Para simplificar o programa, optou-se por incluir a expressão do peso da roda 1 diretamente no subsistema do movimento vertical da respetiva roda. Por este motivo, foram apresentadas 5 expressões e apenas 4 subsistemas.

No caso das forças referentes ao pneu ( $F_{kp1}$  e  $F_{cp1}$ ), utilizou-se um bloco de saturação (*saturation*), uma vez que quando o pneu está no ar, as forças são nulas (visto que não existe contato entre o pneu e o solo). Caso não houvesse este bloco, a força iria ser negativa, o que estaria errado.

Como foi referido, o modelo matemático tornou-se de mais simples compreensão, como é possível observar no subsistema da Figura 44:

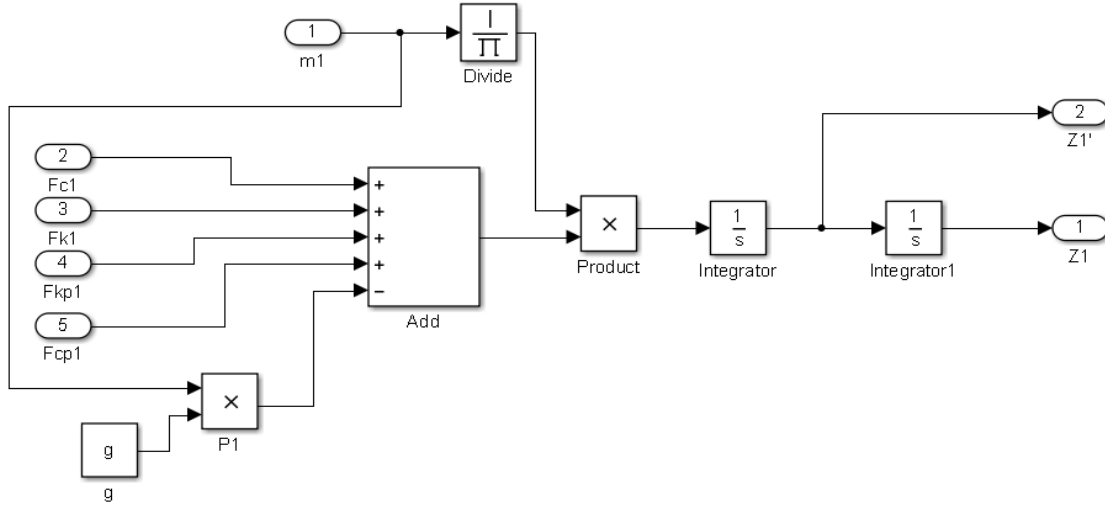


Figura 44 - Subsistema movimento vertical roda 1

Nota: Para o movimento vertical da roda 2, 3 e 4 utilizou-se o mesmo procedimento.

Quanto ao **movimento vertical da carroçaria**, massa suspensa total, foram consideradas as forças relativas ao *downforce*, sendo estas divididas segundo a asa dianteira, a asa traseira e o corpo. Como referido para o caso do movimento vertical da roda 1, a equação utilizada no subsistema apresentado na Figura 45 é a Equação 132 que resulta da Equação 105 resolvida em ordem à maior derivada.

$$m_{st} \times \ddot{Z}_{mst} = -F_{c1} - F_{c2} - F_{c3} - F_{c4} - F_{k1} - F_{k2} - F_{k3} - F_{k4} - F_{Dd} - F_{Dc} - F_{Dt} - P_{mst}$$

Equação 105

$$\ddot{Z}_{mst} = 1/m_{st} \times (-F_{c1} - F_{c2} - F_{c3} - F_{c4} - F_{k1} - F_{k2} - F_{k3} - F_{k4} - F_{Dd} - F_{Dc} - F_{Dt} - P_{mst})$$

Equação 132

Em vez da equação com as forças substituídas - Equação 128:

$$\begin{aligned}
 m_{st} \times \ddot{Z}_{mst} = & -c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_1) - c_2 \\
 & \times (\dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_2) - c_3 \times (\dot{Z}_S + L_{te} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_3) \\
 & - c_4 \times (\dot{Z}_S - L_{td} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_4) - k_1 \\
 & \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - a \times \theta - Z_1) - k_2 \\
 & \times (Z_S - L_{fd} \times \psi - a \times \theta - Z_2) - k_3 \times (Z_S + L_{te} \times \psi + b \times \theta - Z_3) \\
 & - k_4 \times (Z_S - L_{td} \times \psi + b \times \theta - Z_4) \\
 & - (Perc\_downforce\_frente \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}) \\
 & - (Perc\_downforce\_corpo \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}) \\
 & - (Perc\_downforce\_trás \times m_{st} \times g \times n^\circ \text{ de "G"}) - (g \times m_{st})
 \end{aligned}$$

Equação 128

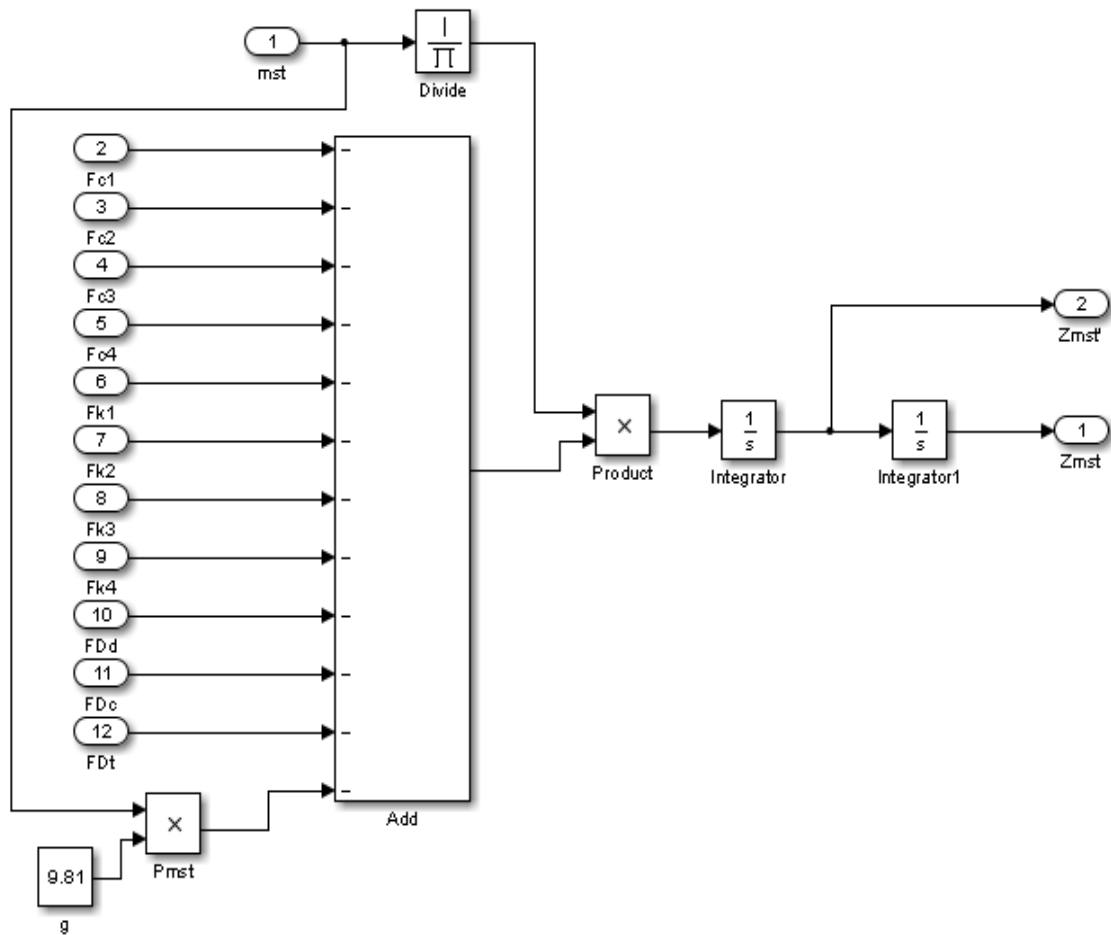


Figura 45 - Subsistema movimento vertical da massa suspensa total

Neste subsistema (Figura 45) aparecem a força descendente (*downforce*) e a massa suspensa total que foram a seguir definidas. O Fórmula Glória B4 em estudo não possui difusor, portanto a Figura 19 não pode ser aplicada integralmente. Como aproximação, a *downforce* foi distribuída segundo a percentagem representada na Figura 46.



Figura 46 - Percentagens admitidas de *downforce* num monolugar sem difusor.

Portanto, para completar o subsistema representado anteriormente, foi necessário acrescentar quatro novos blocos – Figura 47 até à Figura 50 – que dizem respeito à massa suspensa total, à força descendente dianteira, traseira e no corpo, respetivamente.

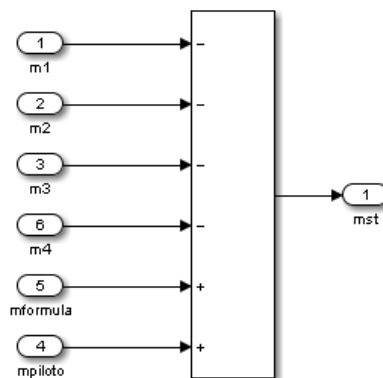


Figura 47 - Cálculo da massa suspensa total.

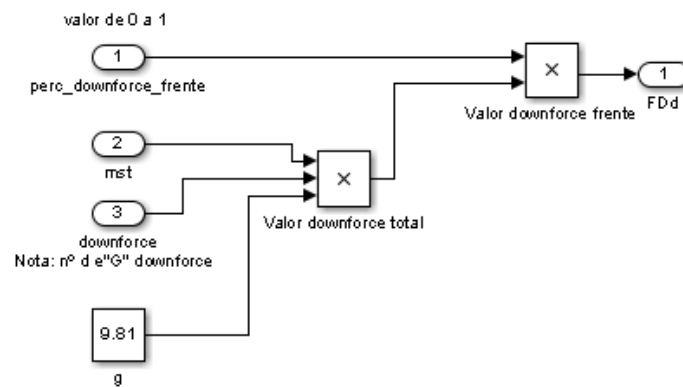


Figura 48 - Subsistema força devido ao *downforce* na asa dianteira - FDd.

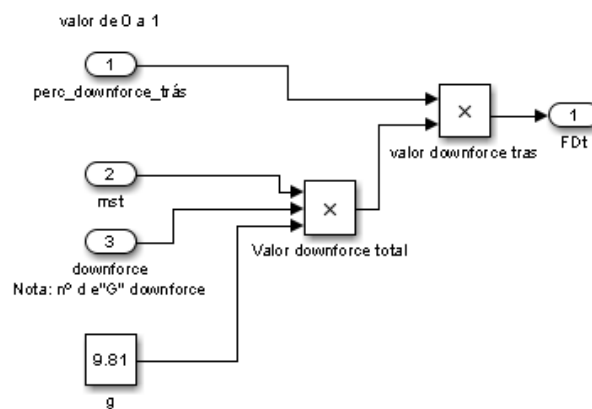


Figura 49 - Subsistema força devido ao *downforce* na asa traseira - FDt.

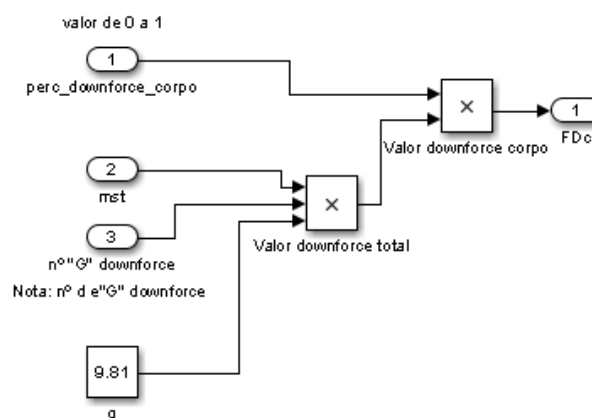


Figura 50 - Subsistema força devido ao *downforce* no corpo - FDc.

**Quanto ao ângulo de *roll*** (Figura 51), foram considerados quatro momentos abaixo definidos, sendo dois relativos às barras estabilizadoras, o momento de inércia longitudinal e o momento de *roll*. Seguindo a metodologia usada anteriormente, o subsistema foi baseado na Equação 122:

$$I_x \times \ddot{\psi} = L_{fd} \times [F_{k2} + F_{c2}] + L_{td} \times [F_{k4} + F_{c4}] - L_{fe} \times [F_{k1} + F_{c1}] - L_{te} \times [F_{k3} + F_{c3}] + M_{roll} - M_{barra\ est\ di} - M_{barra\ est\ tr}$$

Equação 122

Utilizando a Equação 133 que resulta da resolução da Equação 122 em ordem à maior derivada:

$$\ddot{\psi} = 1/I_x \times (L_{fd} \times [F_{k2} + F_{c2}] + L_{td} \times [F_{k4} + F_{c4}] - L_{fe} \times [F_{k1} + F_{c1}] - L_{te} \times [F_{k3} + F_{c3}] + M_{roll} - M_{barra\ est\ di} - M_{barra\ est\ tr})$$

Equação 133

Em vez de utilizar a equação com as forças substituídas - Equação 129.

$$I_x \times \ddot{\psi} = L_{fd} \times [k_2 \times (Z_S - L_{fd} \times \psi - a \times \theta - Z_2) + c_2 \times (\dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_2)] + L_{td} \times [k_4 \times (Z_S - L_{td} \times \psi + b \times \theta - Z_4) + c_4 \times (\dot{Z}_S - L_{td} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_4)] - L_{fe} \times [k_1 \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - a \times \theta - Z_1) + c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_1)] - L_{te} \times [k_3 \times (Z_S + L_{te} \times \psi + b \times \theta - Z_3) + c_3 \times (\dot{Z}_S + L_{te} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_3)] + (m_{st} \times a_y \times h_{cg}) - \left( \frac{500000 \times D_{di}^4}{0.4244 \times A_{di}^2 \times B_{di} + 0.2264 \times C_{di}^3} \times \psi \right) - \left( \frac{500000 \times D_{tr}^4}{0.4244 \times A_{tr}^2 \times B_{tr} + 0.2264 \times C_{tr}^3} \times \psi \right)$$

Equação 129



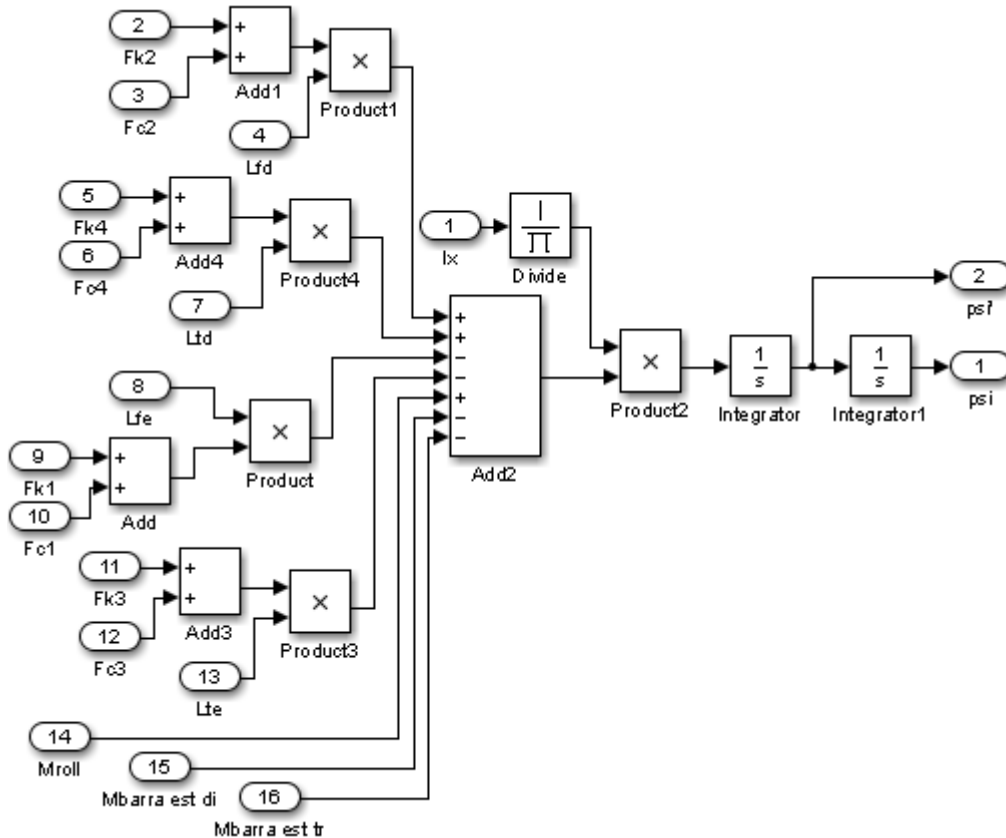


Figura 51 - Subsistema relativo à transferência de massa lateral.

Para obter os momentos resistentes devidos à barra estabilizadora dianteira e traseira (Figura 52 e Figura 53, respetivamente), multiplica-se o coeficiente de rigidez torsional pelo ângulo de *roll* ( $\psi$  -  $\psi$ ). Para o cálculo do coeficiente de rigidez das barras estabilizadoras utilizou-se a fórmula presente na Figura 10 do capítulo 2.1.4.

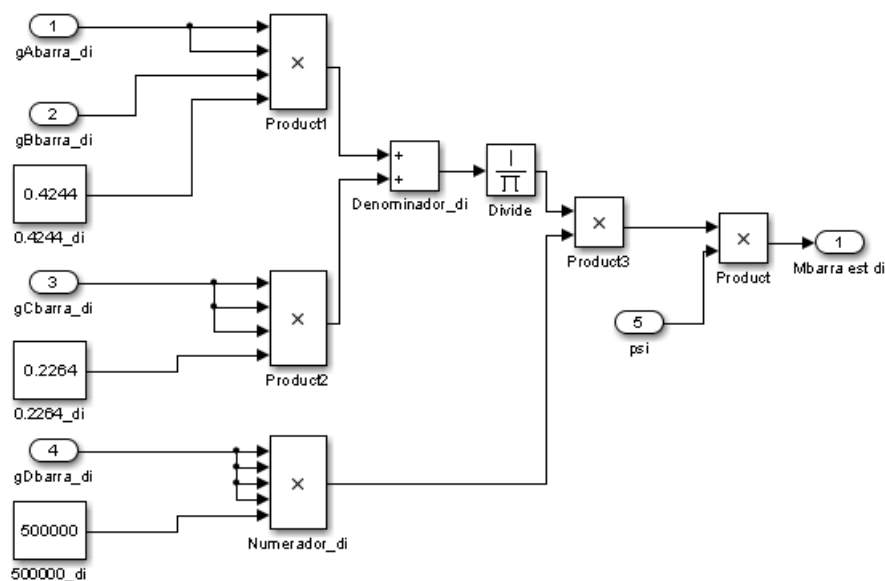


Figura 52 - Subsistema referente ao momento devido à barra estabilizadora dianteira.

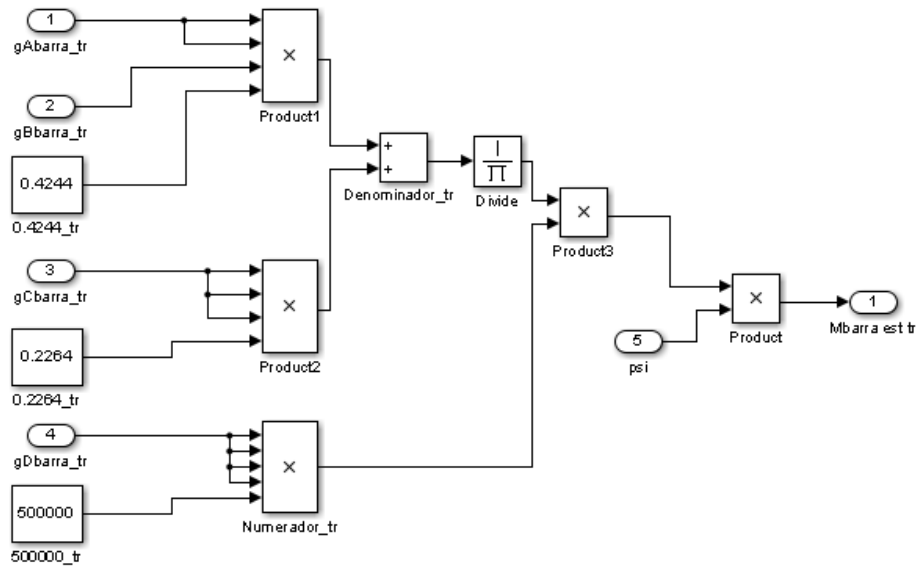


Figura 53 - Subsistema referente ao momento devido à barra estabilizadora traseira.

Os momentos de inércia foram calculados no mesmo subsistema (Figura 54), sendo o momento de inércia lateral –  $I_y$  (Equação 8) e o momento de inércia longitudinal –  $I_x$  (Equação 9).

$$I_y = \frac{m}{12} \times (h^2 + c^2)$$

Equação 8

$$I_x = \frac{m}{12} \times (h^2 + l^2)$$

Equação 9

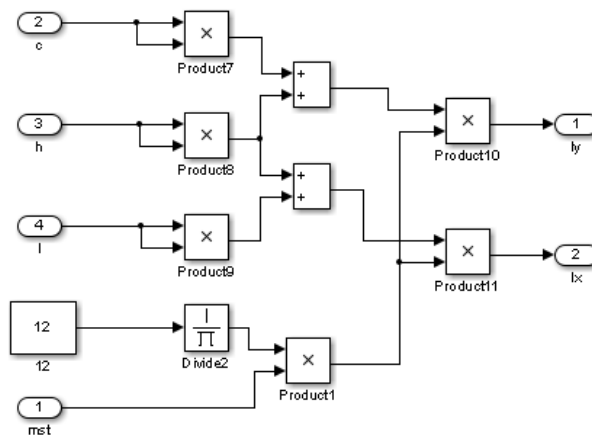


Figura 54 - Subsistema com momentos de inércia lateral e longitudinal.

O momento de *roll* é obtido através da multiplicação da massa suspensa total, pela aceleração lateral e pela altura do centro de gravidade. O subsistema utilizado no Simulink® encontra-se na Figura 55.

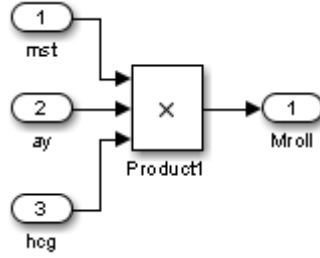


Figura 55 - Subsistema referente ao momento de *roll*.

**Quanto ao ângulo de *pitch*** existe um momento a ser definido que é o momento de *pitch*.

Utilizando a Equação 134 que é resultado da Equação 123 resolvida em ordem à maior derivada, em vez da equação complexa (Equação 130) foi possível representar o subsistema referente à transferência de massa longitudinal (Figura 56).

$$I_y \times \ddot{\theta} = a \times [F_{k1} + F_{c1}] + a \times [F_{k2} + F_{c2}] + (a + a_f) \times F_{Dd} - b \times [F_{k3} + F_{c3}] - b \times [F_{k4} + F_{c4}] - (b + b_t) \times F_{Dt} + M_{pitch}$$

Equação 123

$$\ddot{\theta} = 1/I_y \times (a \times [F_{k1} + F_{c1}] + a \times [F_{k2} + F_{c2}] + (a + a_f) \times F_{Dd} - b \times [F_{k3} + F_{c3}] - b \times [F_{k4} + F_{c4}] - (b + b_t) \times F_{Dt} + M_{pitch})$$

Equação 134

$$I_y \times \ddot{\theta} = a \times [k_1 \times (Z_S + L_{fe} \times \psi - a \times \theta - Z_1) + c_1 \times (\dot{Z}_S + L_{fe} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_1)] + a \times [k_2 \times (Z_S - L_{fd} \times \psi - a \times \theta - Z_2) + c_2 \times (\dot{Z}_S - L_{fd} \times \dot{\psi} - a \times \dot{\theta} - \dot{Z}_2)] + (a + a_f) \times (Perc\_downforce\_frente \times m_{st} \times g \times n^o \text{ de "G"}) - b \times [k_3 \times (Z_S + L_{te} \times \psi + b \times \theta - Z_3) + c_3 \times (\dot{Z}_S + L_{te} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_3)] - b \times [k_4 \times (Z_S - L_{td} \times \psi + b \times \theta - Z_4) + c_4 \times (\dot{Z}_S - L_{td} \times \dot{\psi} + b \times \dot{\theta} - \dot{Z}_4)] - (b + b_t) \times (Perc\_downforce\_trás \times m_{st} \times g \times n^o \text{ de "G"}) + (m_{st} \times a_x \times h_{cg})$$

Equação 130

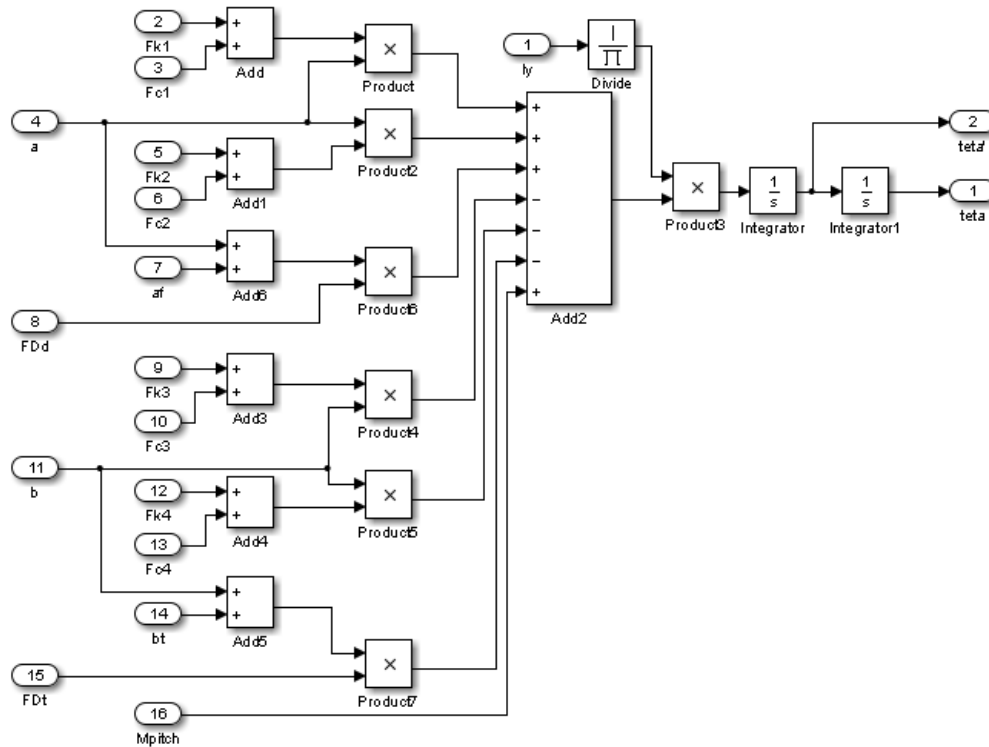


Figura 56 - Subsistema relativo à transferência de massa longitudinal.

O momento de *pitch* é semelhante ao momento de *roll*, sendo que a única diferença entre ambos reside no sentido da aceleração. No caso do momento de *pitch* é considerada a aceleração longitudinal enquanto que no caso do momento de *roll* é considerada a aceleração lateral, como se pode ver na Figura 57.

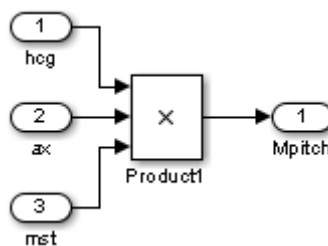


Figura 57 - Subsistema referente ao momento de *pitch*.

Com todos os subsistemas criados, foi possível interligá-los entre si dando origem ao subsistema que tem como base o modelo matemático.

### 4.3 Configuração do programa

Para facilitar a introdução de valores, foram criados dois subsistemas interligados:

- Um subsistema que se denominou “programa” que engloba todos os subsistemas referidos no capítulo 4.2;
- Outro subsistema designado “valores” para introdução dos valores das variáveis de entrada do subsistema “programa”.

O programa ficou com 2 subsistemas principais, separando, assim, o subsistema que contém o modelo matemático do subsistema da introdução de valores, sendo que as designações das saídas do subsistema “valores” são as mesmas das entradas do subsistema “programa”, como se pode ver na Figura 58.

As saídas do programa foram colocadas fora do subsistema “programa”. Desta forma, quando se simula um teste, basta introduzir os valores no subsistema “valores” e ler os resultados nas saídas do subsistema “programa” sem o abrir.

Com esta configuração apenas se acede ao subsistema “programa” quando se pretende efetuar alguma alteração no modelo matemático.

As saídas do programa são apresentadas através de *scopes* (gráficos). Neste caso, cada um dos três *scopes* exibe dois gráficos:

1. Força nas rodas dianteiras (Fkp1 e Fkp2);
2. Força nas rodas traseiras (Fkp3 e Fkp4);
3. Ângulos de *roll* e de *pitch* (sendo que estes foram convertidos de radianos para graus).

Assim, a configuração final do programa ficou de acordo com a Figura 58.

## Projeto da Suspensão Estudo do Equilíbrio Dinâmico de uma Viatura Fórmula

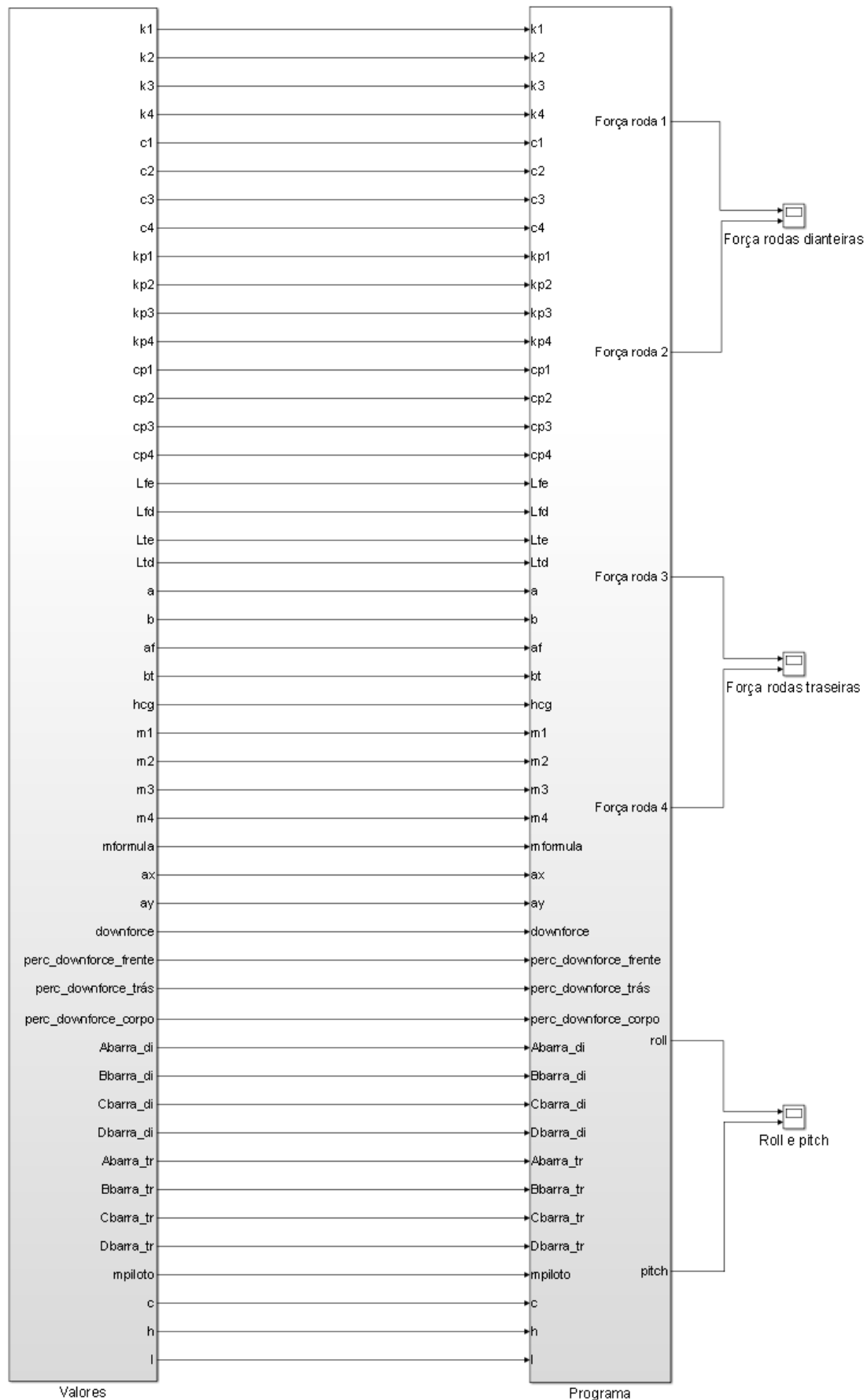


Figura 58 - Blocos principais do programa, separando a introdução de valores (esq.) do modelo (dir.).

## Projeto da Suspensão Estudo do Equilíbrio Dinâmico de uma Viatura Fórmula

Para se introduzir valores utilizam-se três blocos.

1. Constante de valor unitário;
2. Símbolo “gain” que multiplica a contante unitária pelo valor desejado;
3. Saída que guarda o valor obtido.

Um exemplo é a rigidez da suspensão, como se pode ver na Figura 59, que multiplica a constante unitária pelos respetivos ganhos, obtendo assim o valor de rigidez da suspensão para cada roda ( $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$ ).

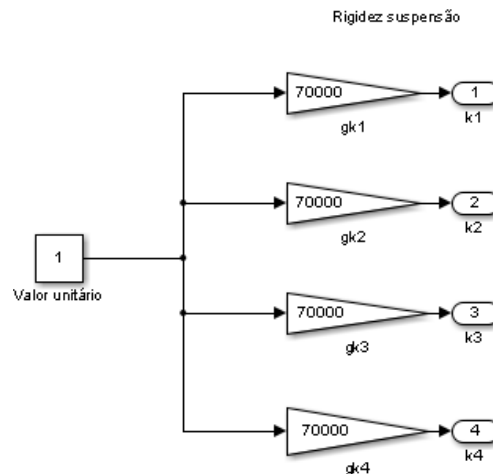


Figura 59 - Valores da rigidez da suspensão.

A composição do bloco da esquerda (“valores”) pode ser vista desde a Figura 60 até à Figura 63 e os subsistemas que constituem o subsistema (“programa”) podem ser vistos na Figura 64.

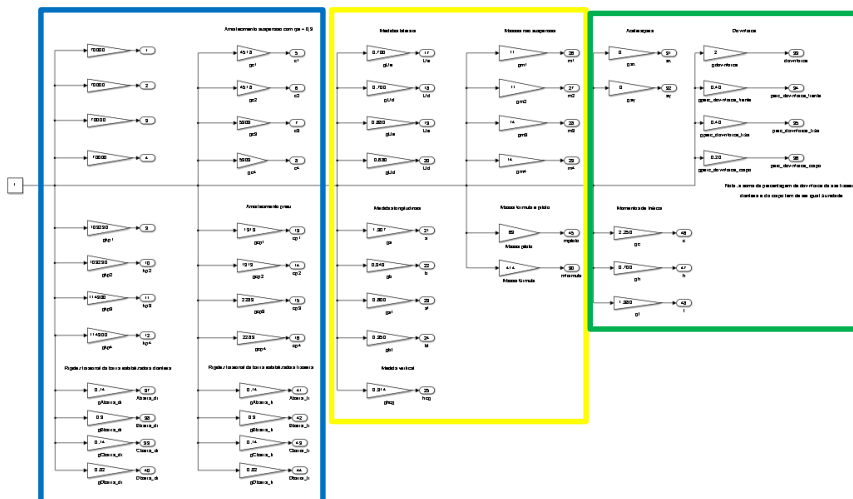


Figura 60 - Subsistema "Valores"

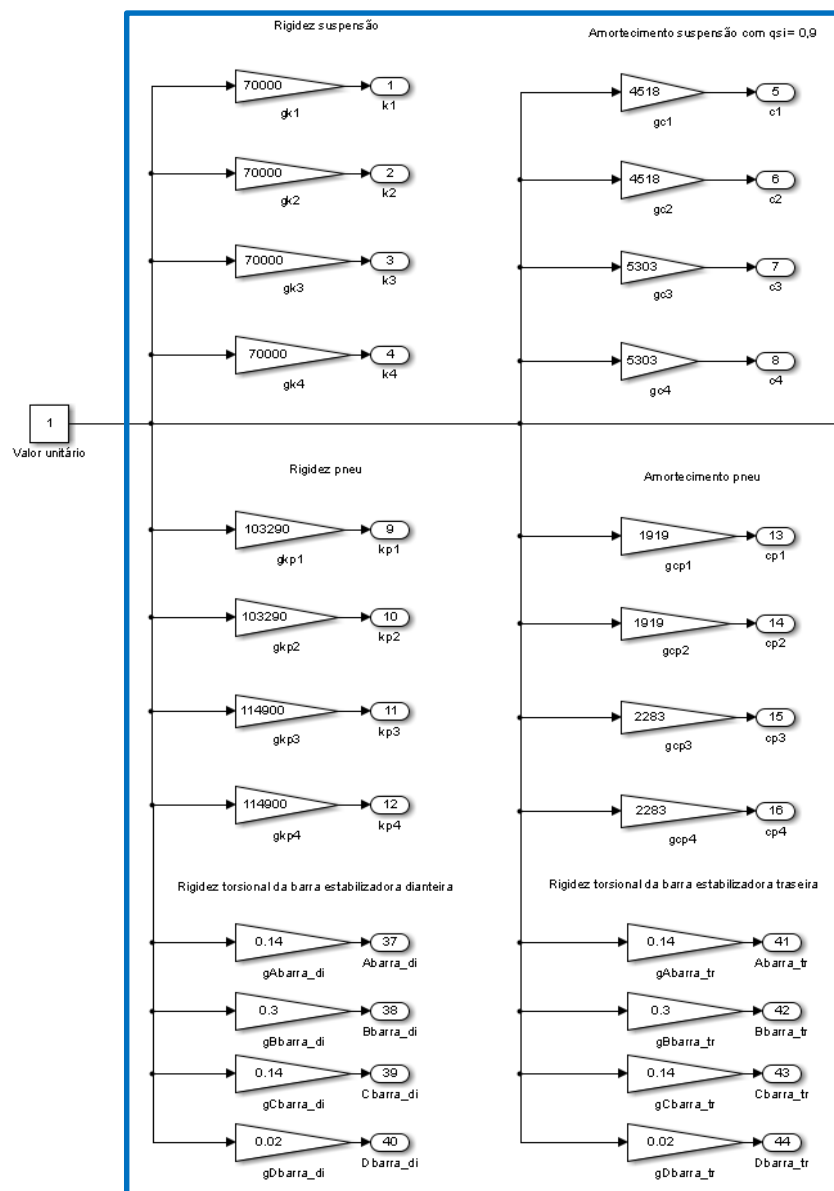


Figura 61 - Subsistema "Valores" - rigidez e amortecimento.



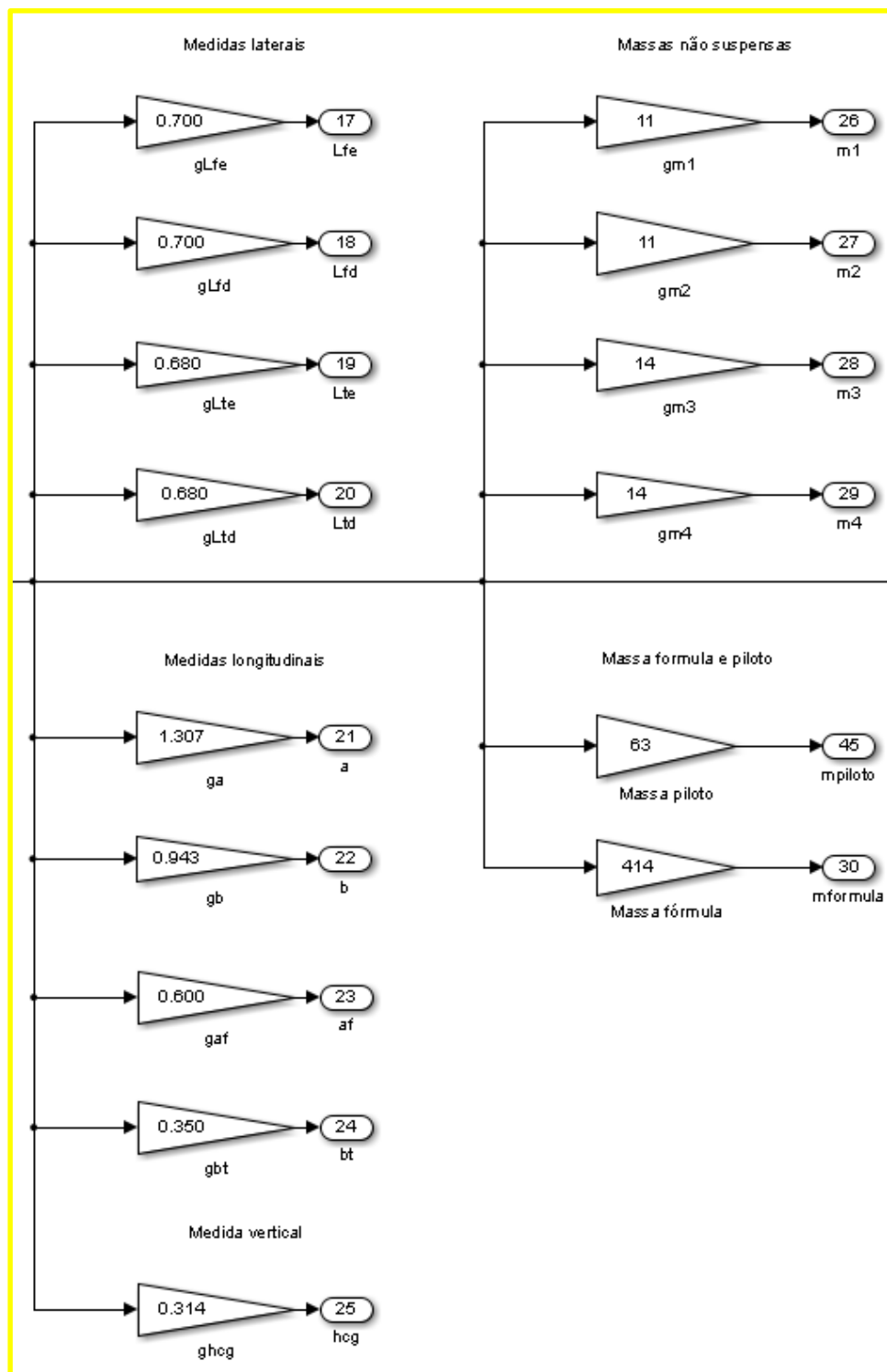


Figura 62 - Subsistema "Valores" - massas e medidas.

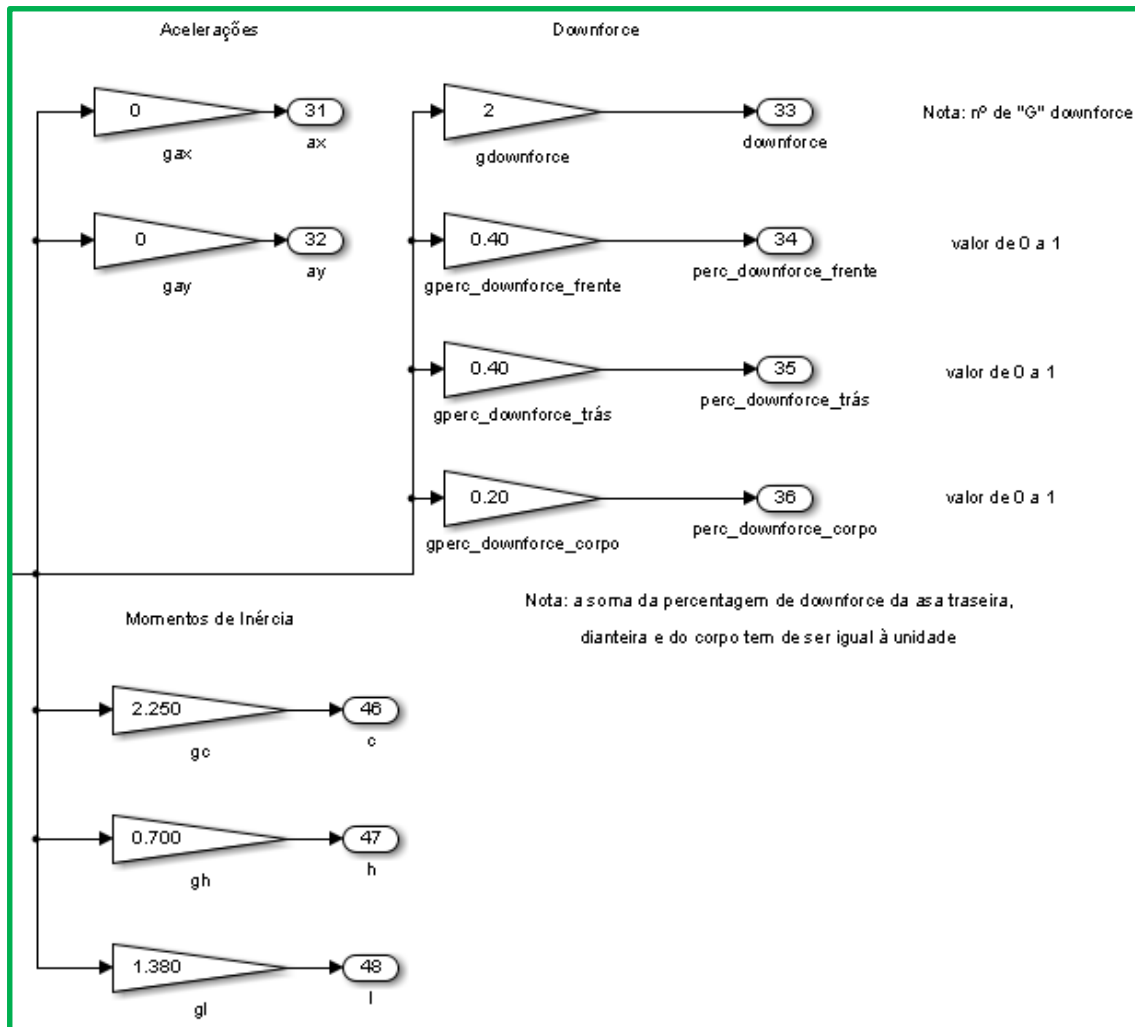


Figura 63 - Subsistema "Valores" - acelerações, momentos de inércia e *downforce*.

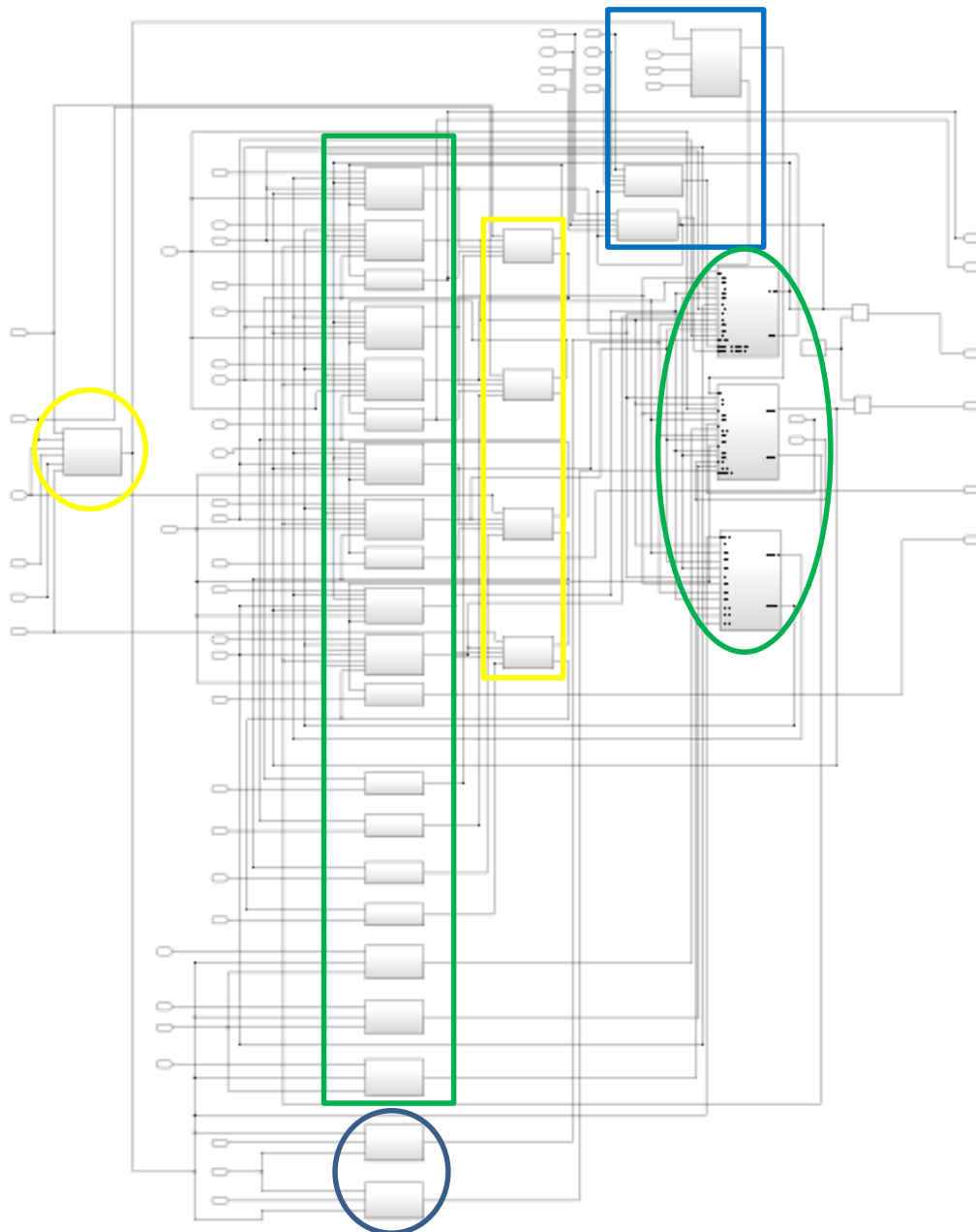


Figura 64 - Subsistema "Programa"

Legenda:

Circunferência amarela	Subsistema da massa suspensa total
Retângulo verde	Subsistemas das forças (rigidez suspensão e pneus, amortecimento suspensão e pneus e <i>downforce</i> )
Circunferência azul	Subsistemas dos momentos de <i>roll</i> e de <i>pitch</i>
Retângulo amarelo	Subsistemas dos movimentos verticais das rodas
Retângulo azul	Subsistema dos momentos de inércia e das barras estabilizadoras
Elipse verde	Subsistemas das rotações ( <i>roll</i> e <i>pitch</i> ) e movimento vertical da carroçaria

## 5 Obtenção de Valores do Fórmula Glória B4

Para a obtenção de todos os valores envolvidos no modelo matemático foi necessário pesar, medir, testar e consultar o manual do Fórmula Glória B4. Para melhor ilustrar este procedimento, cada conjunto de variáveis foi dividido em subcapítulos para melhor compreensão.

### 5.1 Constante de rigidez das molas da suspensão

Segundo o manual do Fórmula Glória B4, existem 3 molas de suspensão que podem ser identificadas pelas suas cores - Figura 65.



Figura 65 - Molas para o Fórmula Glória B4. (ManualGloria)

A cada cor corresponde uma constante de rigidez e um diâmetro com os valores apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Constantes de rigidez possíveis para o Fórmula Glória B4. (ManualGloria)

Cor	Constante de rigidez (kN/m)	Diâmetro (mm)
Branca	50	9
Preta	70	10
Amarela	90	10.5

O Fórmula Glória B4 disponível para estudo veio equipado com as molas pretas na frente e na traseira.

## 5.2 Constante de rigidez torsional das barras estabilizadoras

O Fórmula Glória B4 possui duas barras estabilizadoras, uma dianteira ( $k_{\text{barra est di}}$ ) e outra traseira ( $k_{\text{barra est tr}}$ ). O valor da rigidez de cada barra estabilizadora foi calculado através de um subsistema que utiliza a expressão apresentada na Figura 10. Para obter as medidas representadas por A, B, C e D foi utilizada uma fita métrica, tendo sido os valores aproximados ao centímetro. Os valores da barra estabilizadora frontal são iguais aos valores da barra traseira; portanto, os valores de rigidez vão ser iguais. Na Tabela 3 encontram-se os valores retirados do monolugar em estudo.

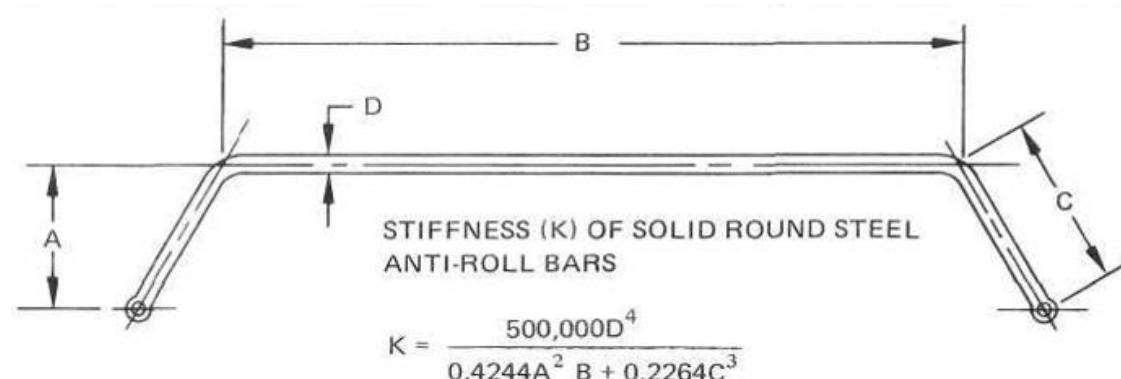


Figura 10 – Rigidez torsional de uma barra estabilizadora. (Puhn)

Tabela 3 - Medidas do monolugar em estudo para o cálculo da rigidez torsional.

Barra	Medida (mm)	Medida (m)
A	140	0.140
B	300	0.300
C	140	0.140
D	20	0.020

### 5.3 Constante de rigidez dos pneus

Para calcular a rigidez dos pneus utilizou-se uma máquina de compressão da marca *Tinius Olsen* como se pode ver na Figura 66. Esta máquina, através de um mecanismo hidráulico, consegue aplicar um aumento de carga constante; desta forma, para cada incremento de 50kg (valor lido no mostrador – Figura 67) foi retirado o valor de deslocamento do pneu.

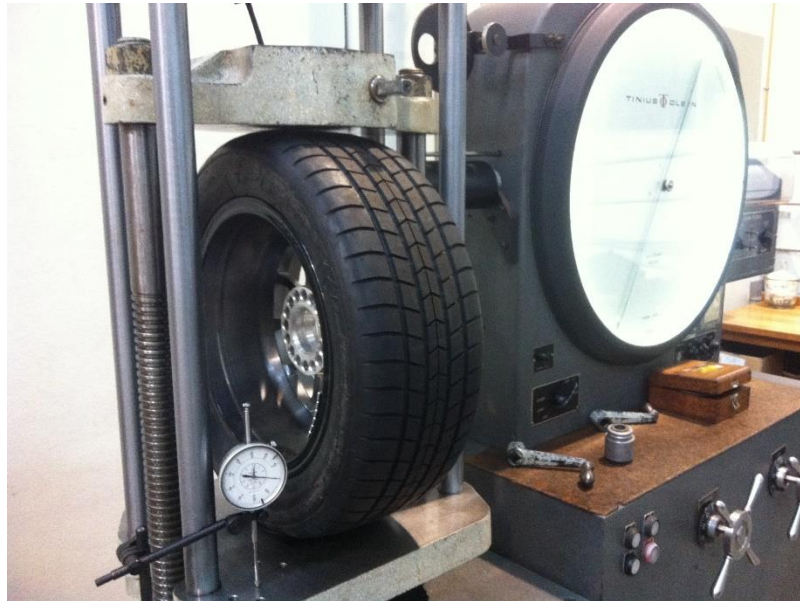


Figura 66 - Máquina de compressão Tinius Olsen.

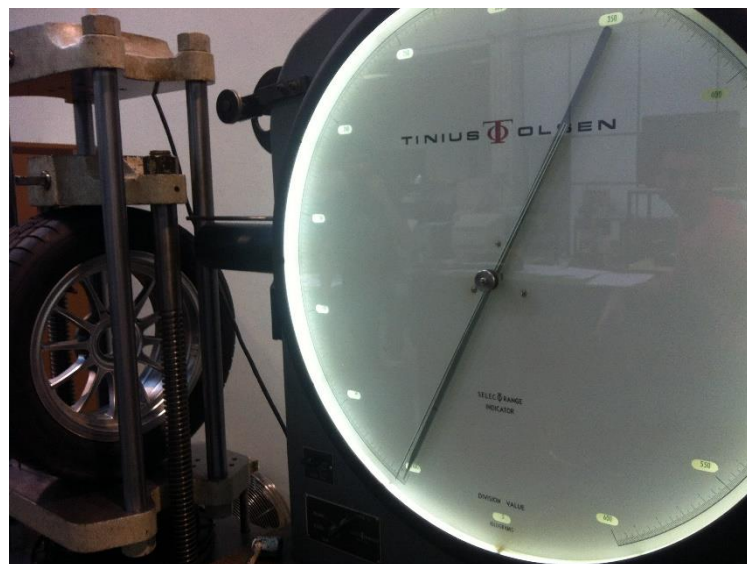


Figura 67 - Mostrador da máquina de compressão Tinius Olsen.

Como se trata de uma máquina antiga, não foi possível ler o valor do deslocamento do pneu diretamente, tendo sido necessário utilizar-se um medidor de deslocamento como se pode ver na Figura 68.



Figura 68 - Medidor de deslocamento utilizado na máquina de compressão.

Foram feitos vários ensaios à temperatura ambiente, para a determinação do coeficiente de rigidez para cada tipo de pneu (*slick* e chuva); assim, para cada um deles foram feitos ensaios com diferentes pressões (30, 35 e 40 psi) e para diferentes larguras (trás – 215 mm e frente – 175 mm). Os resultados de todos os ensaios estão disponíveis no anexo A.

As pressões foram escolhidas com base nos valores de referência do fabricante (*Toyo*) que aconselhavam uma pressão no intervalo de 30 a 40 psi. Desta forma, os pneus foram testados para os limites e para o ponto médio.

Para analisar a variação de rigidez com a temperatura, utilizou-se, a título de exemplo, um pneu da frente *slick* aquecido até aos 90°C (temperatura média atingida em pista para um pneu deste tipo).

Através de todos os ensaios efetuados, foi possível tirar conclusões sobre a variação da rigidez provocada por vários fatores, tais como:

1. Largura;
2. Pressão;
3. Temperatura.

Nota: Para corrigir eventuais erros de leitura, foram feitos 3 ensaios para a pressão de 35 psi, uma vez que foi a pressão considerada para as simulações. Para as outras pressões apenas foi feito 1 ensaio para cada tipo de pneu e largura.

Para todos os ensaios foram recolhidos os valores de deslocamento para incrementos de 50kg até 250kg (inclusive).

### 5.3.1 Variação da rigidez com a largura dos pneus

Neste subcapítulo pretendeu-se estudar a relação da rigidez dos pneus com a sua largura. Na Tabela 4 apresenta-se os resultados obtidos para os pneus de chuva da frente (175mm de largura) e de trás (215mm de largura) a 35psi e à temperatura ambiente.

As tabelas e os respetivos gráficos com os resultados obtidos para as pressões, tipos de pneus e temperaturas consideradas podem ser consultadas no anexo A.

Tabela 4 - Valores obtidos para pneus de chuva a 35psi.

Força (N)	Deslocamentos Obtidos (mm)							
	Pneus de Chuva Frente				Pneus de Chuva Trás			
	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Média	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Média
0	0	0	0	0	0	0	0	0
490.5	6.1	6.3	6.0	6.1	4.7	4.4	4.8	4.6
981.0	11.0	11.1	10.8	11.0	9.2	8.8	9.6	9.2
1471.5	15.7	15.7	14.8	15.4	13.5	13.0	14.3	13.6
1962.0	20.0	20.0	19.4	19.8	17.6	16.9	17.8	17.4
2452.5	24.3	24.1	23.6	24.0	21.5	20.6	21.7	21.3

Com os valores obtidos na Tabela 4, traçaram-se dois gráficos de dispersão (Figura 69 e Figura 70), tendo-se adicionado as linhas de tendência e respetivas equações.

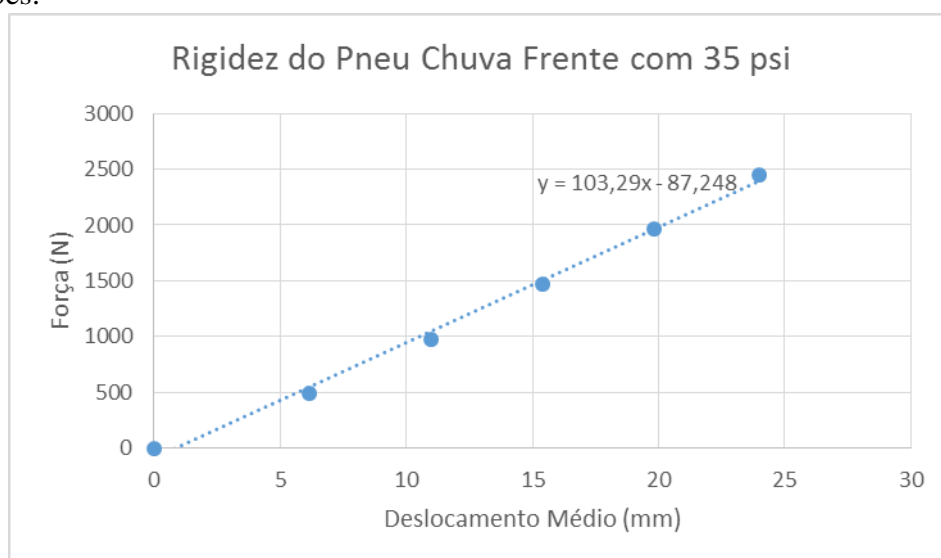


Figura 69 - Rigidez do pneu de chuva frente.



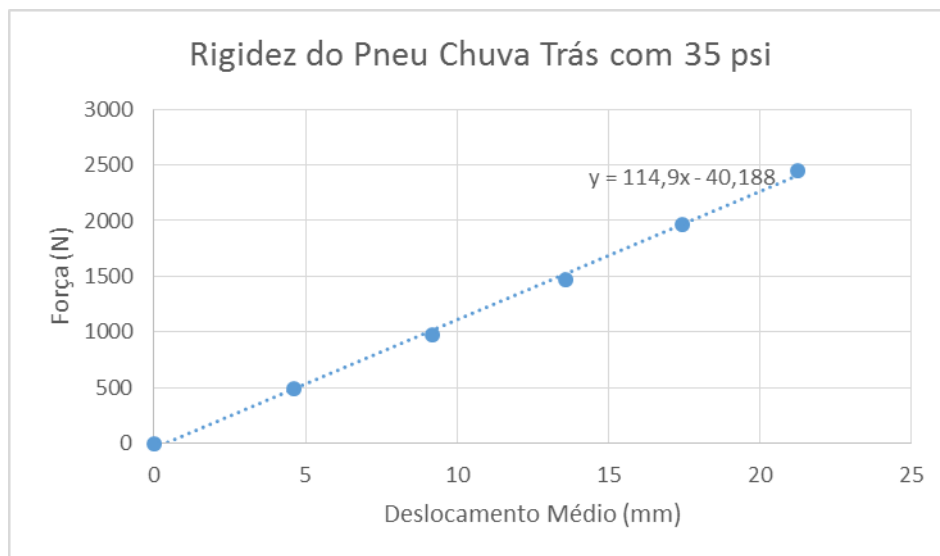


Figura 70 - Rigidez do pneu de chuva trás.

Conjugando os dois gráficos presentes na Figura 69 e Figura 70, obteve-se o seguinte gráfico (Figura 71):

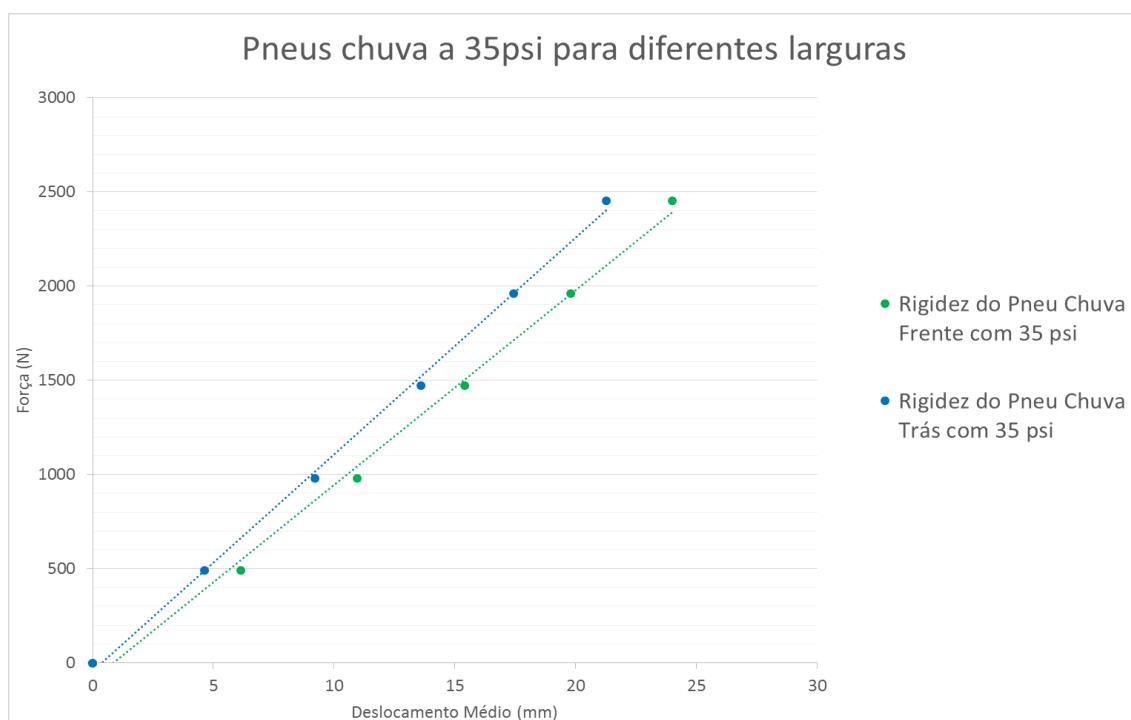


Figura 71 - Gráfico que relaciona a largura dos pneus de chuva a 35 psi.

Através do declive das linhas de tendência dos gráficos da Figura 69 e Figura 70, foi obtida a rigidez dos pneus para cada situação (Tabela 5).

Tabela 5 - Rigidez dos pneus de chuva a 35psi.

	<b>Rigidez (N/mm)</b>	<b>Rigidez (N/m)</b>
Pneus chuva frente (175)	103.29	103290
Pneus chuva trás (215)	114.9	114900

A conclusão destes ensaios foi que, quanto maior a largura dos pneus, maior será a sua rigidez.

### 5.3.2 Variação da rigidez dos pneus com a pressão

Neste subcapítulo pretendeu-se estudar a relação da rigidez dos pneus com a sua pressão. Na Tabela 6 apresenta-se os resultados obtidos para os pneus de chuva a 30, 35 e 40 psi para os pneus da frente à temperatura ambiente.

As tabelas e os respetivos gráficos com os resultados obtidos para as pressões, tipos de pneus e temperaturas consideradas podem ser consultadas no anexo A.

Tabela 6 - Valores obtidos para pneus de chuva frente.

Força (N)	Deslocamentos Obtidos Pneus de Chuva Frente (mm)					
	Pressão de 30 psi	Pressão de 35 psi				Pressão de 40 psi
	Ensaio	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Média	Ensaio
0	0	0	0	0	0	0
490.5	5.8	6.1	6.3	6.0	6.1	5.0
981.0	10.9	11.0	11.1	10.8	11.0	9.4
1471.5	15.9	15.7	15.7	14.8	15.4	13.7
1962.0	20.7	20.0	20.0	19.4	19.8	18.6
2452.5	25.2	24.3	24.1	23.6	24.0	21.3

Com os valores obtidos na Tabela 6, traçaram-se três gráficos de dispersão (Figura 72 até Figura 74), tendo-se adicionado as linhas de tendência e respetivas equações.

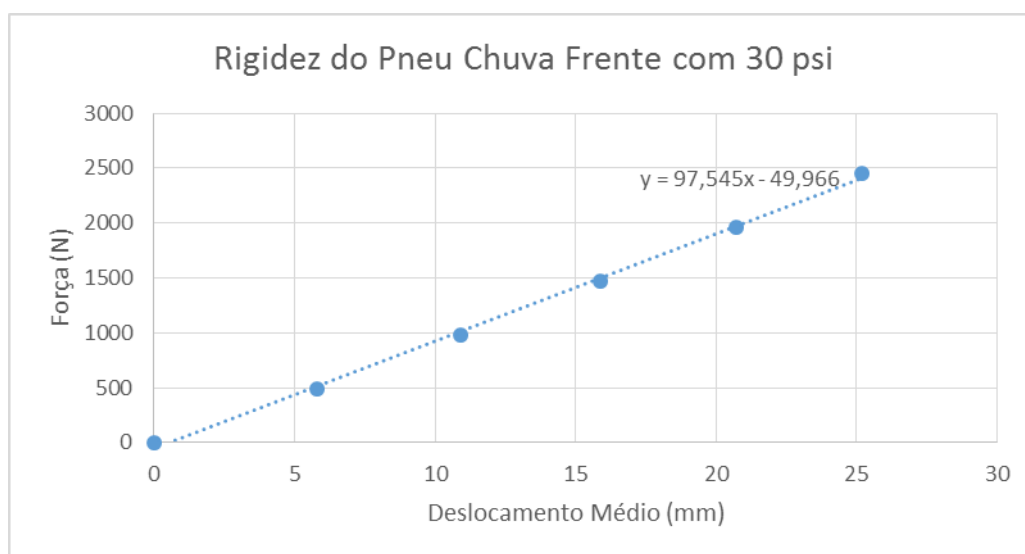


Figura 72 – Rigidez dos pneus de chuva da frente com 30 psi.

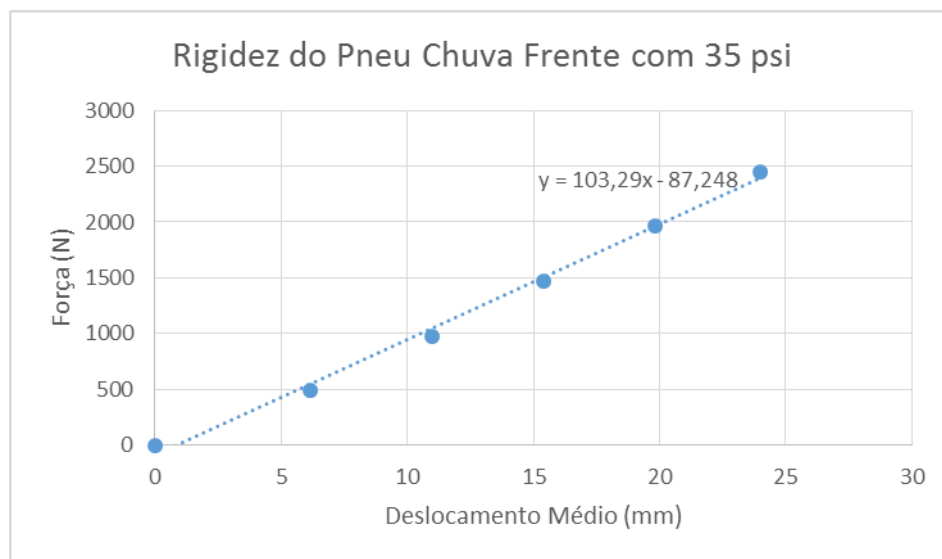


Figura 73 - Rigidez dos pneus de chuva da frente com 35 psi.

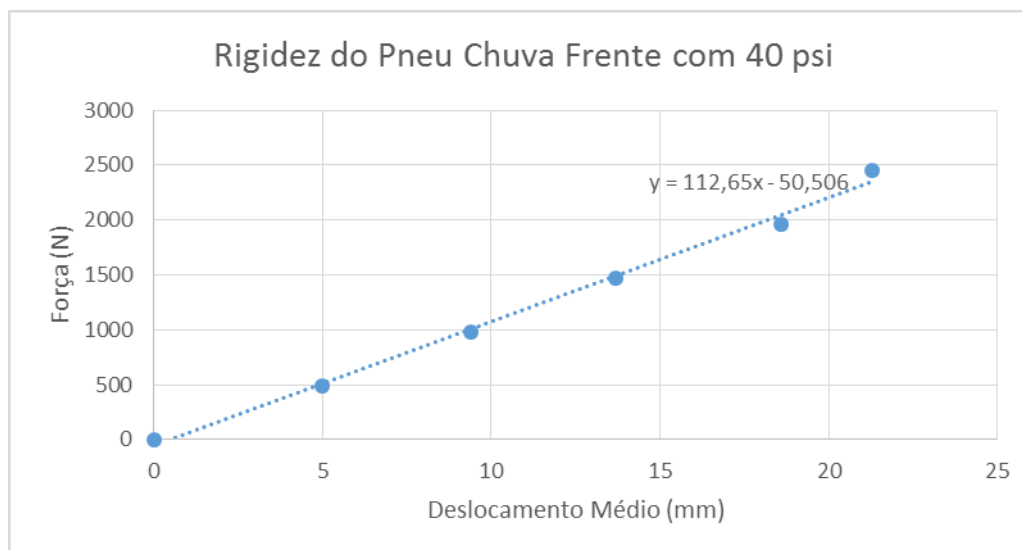


Figura 74 - Rigidez dos pneus de chuva da frente com 40 psi.

Conjugando os três gráficos presentes desde a Figura 72 até à Figura 74, obteve-se o gráfico (Figura 75) que relaciona as várias pressões para pneus de chuva da frente.

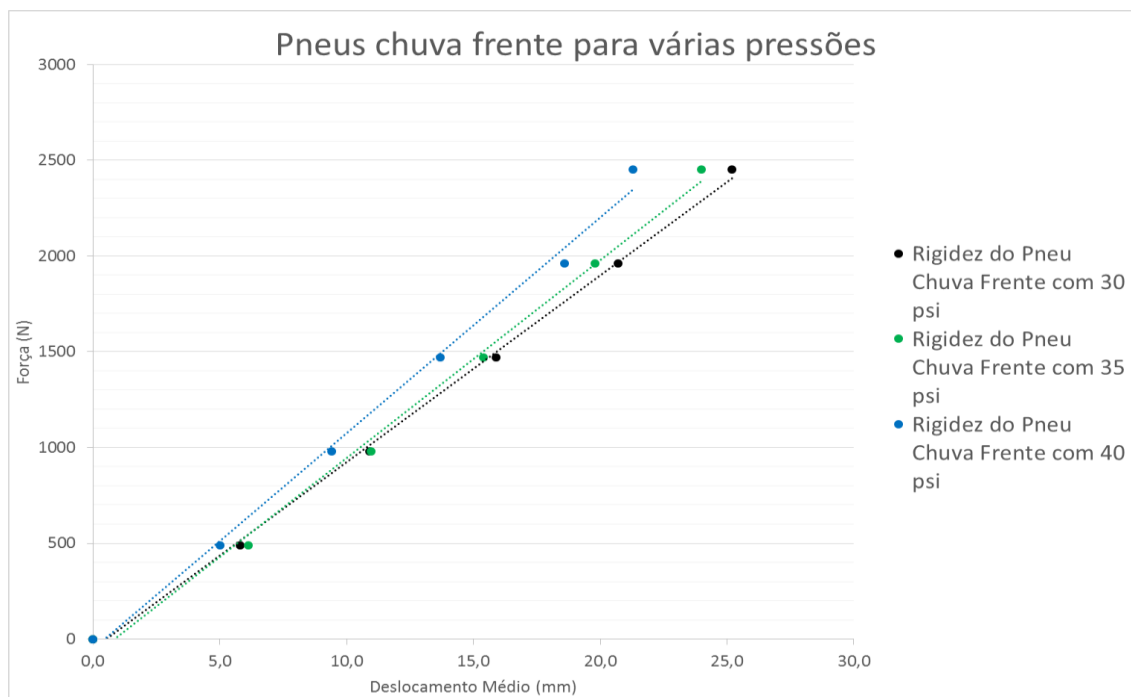


Figura 75 - Gráfico que relaciona a pressão dos pneus de chuva para a frente.

Através do declive das linhas de tendência dos gráficos da Figura 72 até a Figura 74, foi determinada a rigidez dos pneus para cada valor de pressão (Tabela 7).

Tabela 7 - Rigidez dos pneus de chuva para diferentes pressões.

	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus chuva frente 30 psi	97.545	97545
Pneus chuva frente 35 psi	103.29	103290
Pneus chuva frente 40 psi	112.65	112650

Quanto maior a pressão, maior a rigidez como se pode ver pelos valores da Tabela 7. Para os restantes tipos de pneus, quer sejam da frente ou de trás, de chuva ou slick, um aumento de pressão também resulta num aumento de rigidez.

### 5.3.3 Variação da rigidez dos pneus com a temperatura

Neste subcapítulo pretendeu-se estudar a relação da rigidez dos pneus com a sua temperatura. Na Tabela 8 apresenta-se os resultados obtidos para os pneus *slick* da frente a 40 psi.

As tabelas e os respetivos gráficos com os resultados obtidos para as pressões, tipos de pneus e temperaturas consideradas podem ser consultadas no anexo A.

Tabela 8 - Deslocamentos obtidos pneus de chuva frente com 40psi à temperatura ambiente e a 90°C.

Força (N)	Deslocamentos Obtidos Pneus <i>Slick</i> Frente (mm)	
	Temperatura ambiente	Temperatura de 90 °C
0	0	0
490.5	5.0	5.8
981.0	9.5	10.4
1471.5	13.6	14.7
1962.0	17.7	18.9
2452.5	21.4	22.8

Com os valores obtidos na Tabela 8, traçaram-se dois gráficos de dispersão (Figura 76 e Figura 77), tendo-se adicionado as linhas de tendência e respetivas equações.

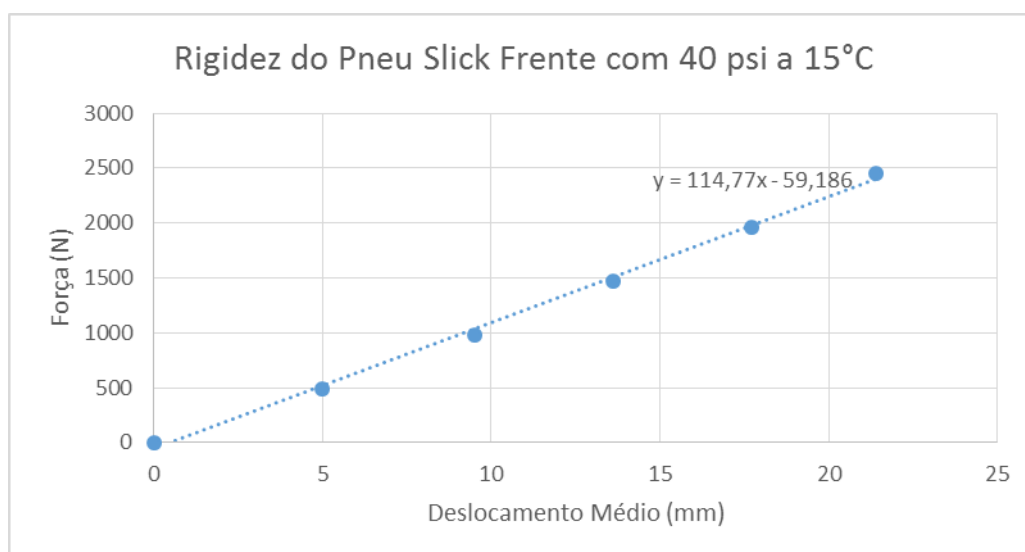


Figura 76 - Rigidez do pneu slick frente à temperatura ambiente.

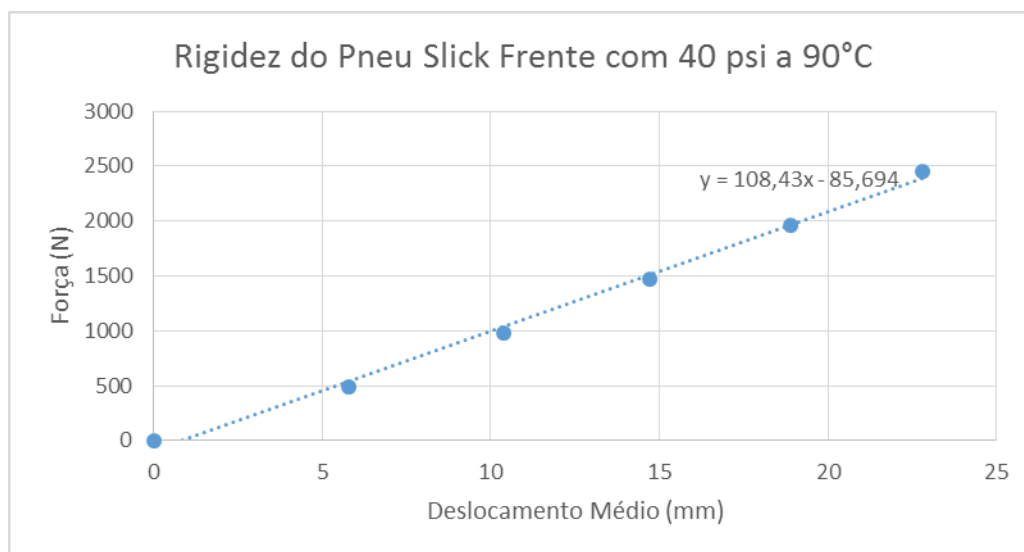


Figura 77 - Rigidez do pneu slick a 90°C.

Conjugando os dois gráficos presentes na Figura 76 e na Figura 77, obteve-se o seguinte gráfico (Figura 78):

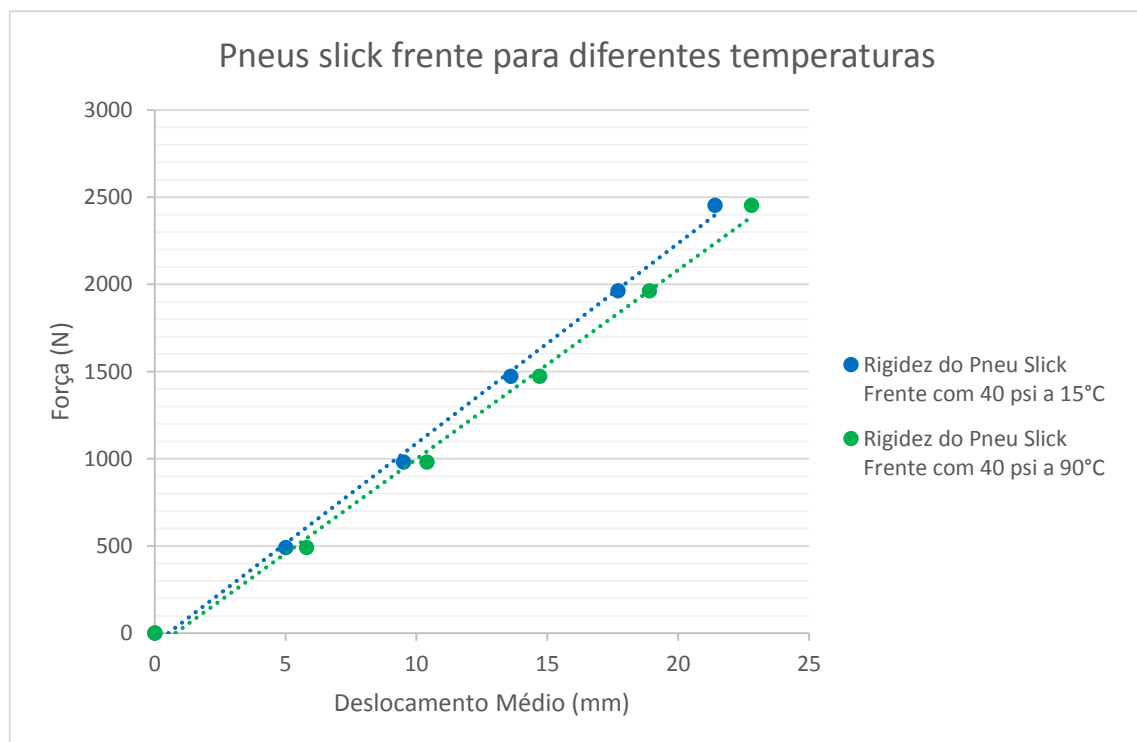


Figura 78 - Gráfico que relaciona diferentes temperaturas para pneus slick frente.

Através do declive das linhas de tendência dos gráficos da Figura 76 e Figura 77, foi obtida a rigidez dos pneus para cada temperatura (Tabela 9).

Tabela 9 - Rigidez dos pneus de chuva a 40psi.

	<b>Rigidez (N/mm)</b>	<b>Rigidez (N/m)</b>
Pneus <i>slick</i> frente à temperatura ambiente	114.77	114770
Pneus <i>slick</i> frente a 90°C	108.43	108430

A conclusão destes ensaios foi que, quanto menor a for a temperatura dos pneus, maior será a sua rigidez.

Este subcapítulo teve como objetivo estudar a variação de rigidez de um pneu com a temperatura. Aqueceu-se um pneu *slick* da frente até aos 90°C (temperatura média atingida em pista para um pneu deste tipo). À temperatura ambiente, o pneu tinha 35 psi; depois de aquecido, utilizou-se um manómetro e registou-se a sua pressão que era de, aproximadamente, 40 psi. Portanto, comparou-se este pneu com um pneu à temperatura ambiente a 40 psi. O gráfico da Figura 78 contém as curvas que representam a rigidez do pneu aquecido e a rigidez do pneu à temperatura ambiente, ambos a 40 psi.



#### 5.3.4 Valores de rigidez dos pneus a utilizar nas simulações

Para efetuar os testes foram utilizados os pneus de chuva à temperatura ambiente a 35 psi pelas seguintes razões:

- Não aquece durante a prova devido às condições meteorológicas (chuva);
- Ser a pressão média fornecida pelo fabricante.

Os valores da rigidez dos pneus apresentam-se na Tabela 10:

Tabela 10 - Valores utilizados nos testes - pneus de chuva a 35 psi à temperatura ambiente.

	<b>Rigidez (N/m)</b>
Pneus chuva frente ( $k_{p1}$ e $k_{p2}$ )	103290
Pneus chuva trás ( $k_{p3}$ e $k_{p4}$ )	114900

## 5.4 Centro de gravidade

Numa primeira fase, o monolugar disponível para estudo foi pesado sem piloto, tendo-se obtido uma massa de 414 kg. De seguida, foi pesado com uma pessoa no cockpit (a simular o piloto) obtendo-se uma massa total de 477 kg. Assim, a massa do piloto é de 63 kg (477-414).

Para definir o centro de gravidade é necessário saber a distribuição de peso do monolugar sobre cada roda. Para tal, colocou-se uma balança debaixo de cada roda de forma a obter-se o correspondente peso, tendo em atenção: o alinhamento das suspensões, o nivelamento do piso e o nível de depósito (50%).

Para simular uma situação real, optou-se por pesar o Fórmula Glória B4 com o piloto (Figura 79):



Figura 79 - Pesagem do Fórmula Glória B4 disponível para estudo com piloto.

Com esta pesagem foi possível saber a distribuição da massa do Fórmula Glória B4, como se pode ver na Tabela 11:

Tabela 11 - Massa distribuída no monolugar em estudo.

	Massa (kg)	Percentagem (%)
Esquerda	239	50.1
Direita	238	49.9
Frente	200	42.0
Traseira	277	58.0

No entanto, para calcular o centro de gravidade, para além da distribuição do peso, também é preciso definir os valores das medidas dos pneus (Tabela 12), a distância entre eixos e a largura de eixos (Tabela 13):

Para saber as medidas dos pneus, tiraram-se as referências:

- Pneus *Toyo* rs1 175/55 R 13 (frente);
- Pneus *Toyo* rs1 215/50 R 13 (trás).

Tabela 12 - Medidas dos pneus.

Pneu	Largura (mm)	Altura (mm)
<i>Slick</i> trás	215	545.2
<i>Slick</i> frente	175	522.7
Chuva trás	215	545.2
Chuva frente	175	522.7

Tabela 13 - Valores das distâncias entre eixos e de largura de eixos.

	Valores (mm)
Distância entre eixos	2250
Largura de eixos frontal	1400
Largura de eixos traseira	1360
Largura de eixos média	1380

Recolhidos todos estes valores, foi possível definir o centro de gravidade utilizando-se as equações presentes na Figura 11 do capítulo 2.2.

$$a = \frac{\text{massa traseira}}{\text{massa total}} \times \text{distância entre eixos} = \frac{277}{477} \times 2250 = 1306.6 \approx 1307 \text{ mm}$$

Equação 135

$$r = \left( \frac{\text{massa lado direito}}{\text{massa total}} - \frac{1}{2} \right) \times \text{largura de eixos} = \left( \frac{238}{477} - \frac{1}{2} \right) \times 1380 = -1.4 =$$

$\approx 0 \text{ mm}$

Equação 136

O centro de gravidade encontra-se a 1307mm do eixo frontal – “a” e a 943 mm do eixo traseiro (distância entre eixos menos o valor de “a”).

A distância do centro de gravidade em relação ao eixo longitudinal é considerada nula uma vez que tem uma distância desprezável.

Para saber qual a altura do centro de gravidade, foi necessário pesar o Fórmula Glória B4 com uma das partes deste elevada, para determinar a alteração da distribuição de peso. Como quanto maior for o desnível maior é a precisão, foi elevada a frente porque permite uma maior elevação; se fosse levantada a traseira, a asa frontal tocava no chão. Com os apoios disponíveis obteve-se uma elevação de 452mm. Como na pesagem anterior, houve o cuidado de alinhar as suspensões, verificar o nivelamento do piso e o nível de depósito (50%).

A distribuição de massas obtida encontra-se na Tabela 14:

Tabela 14 - Massa distribuída no Fórmula Glória B4 com uma elevação na frente de 452 mm.

	Massa (kg)	Percentagem (%)
Esquerda	239	50.1
Direita	238	49.9
Frente	198	41.5
Traseira	279	58.5

Para o cálculo da altura do centro de gravidade utilizaram-se as equações presentes na Figura 12 do capítulo 2.2, sendo “B” o desnível.

Para calcular o ângulo representado na Figura 12 (o qual designei por  $\alpha$  visto que o ângulo  $\theta$  é o ângulo de *pitch*) utilizou-se o seno em vez da tangente, uma vez que a hipotenusa (distância entre eixos) já era conhecida.

$$\sin(\alpha) = \frac{B}{\text{distância entre eixos}} = \frac{452}{2250} = 0.2$$

Equação 137

$$\alpha = \sin^{-1} 0.2 = 0.2 \text{ rad} = 11.6^\circ$$

Equação 138

$$L = \sqrt{(\text{distância entre eixos}^2 - B^2)} = \sqrt{(2250^2 - 452^2)} = 2204.1 \text{ mm}$$

Equação 139

$$G = \frac{\text{massa frente}}{\text{massa total}} \times L = \frac{198}{477} \times 2204.1 = 914.9 \text{ mm}$$

Equação 140

$$h_{CG} = \frac{b}{\tan \alpha} - \frac{G}{\sin \alpha} + \text{metade altura média pneu} = \frac{943}{\tan 0.2} - \frac{914.9}{\sin 0.2} + 267 = 314 \text{ mm}$$

Equação 141

Na Tabela 15 encontram-se os valores referentes ao centro de gravidade.

Tabela 15 - Tabela resumo do centro de gravidade

	Valores (mm)
Distância centro de gravidade – eixo frontal (a)	1307
Distância centro de gravidade – eixo traseiro (b)	943
Distância centro de gravidade – eixo longitudinal (r)	0
Altura do centro de gravidade (h <sub>cg</sub> )	314

## 5.5 Constante de amortecimento da suspensão

Para calcular o coeficiente de amortecimento efetivo da suspensão, numa primeira fase, é necessário aplicar uma velocidade constante ao pneu e medir a força exercida por este; numa segunda fase, repetir este procedimento para várias velocidades.

De seguida, através da equação presente na Figura 4 ( $F_c = c \times (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$ ) que relaciona a força com velocidades, obtém-se a constante de amortecimento do pneu para uma determinada pressão, tipo de pneu e temperatura.

Por fim, repete-se este teste para diferentes pressões, tipos de pneus e temperaturas.

Não existia possibilidade, com os recursos disponíveis na faculdade, de aplicar uma velocidade constante ao pneu e medir a sua força. Para prosseguir com o estudo dinâmico do monolugar foi considerada a razão de amortecimento ( $\xi$  igual a 0.9), próxima da ideal para competição ( $\xi = 1$ ).

Portanto, para calcular o valor da constante de amortecimento efetivo, foi utilizada a Equação 5 resolvida em ordem a “c”. A Tabela 17 mostra os valores obtidos para o coeficiente de amortecimento efetivo de cada suspensão ( $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$ ).

$$\xi = \frac{c}{2 \times m \times \omega_n} = \frac{c}{2 \times \sqrt{k \times m}}$$

Equação 5

Neste caso, o k representa o coeficiente de rigidez da suspensão e m a massa suspensa total sobre cada roda.

A massa suspensa total é calculada subtraindo à massa total do monolugar (com piloto) a massa das 4 rodas (massas não suspensas), como se pode ver na Equação 142.

Para saber a massa de cada roda os pneus foram pesados (Tabela 16):

Tabela 16 - Massa das rodas.

Pneu	Massa (kg)
<i>Slick</i> trás	13
<i>Slick</i> frente	11
Chuva trás	14
Chuva frente	11

Nota: É de relembrar, que para efeitos de cálculo, se utiliza os pneus de chuva pela razão apresentada no capítulo 5.3.4 (Valores de rigidez dos pneus a utilizar nas simulações).

$$\begin{aligned} m_{st} &= m_{fórmula} + m_{piloto} - m_1 - m_2 - m_3 - m_4 = \\ &= 414 + 63 - 11 - 11 - 14 - 14 = 427 \text{ kg} \end{aligned}$$

Equação 142

A Tabela 11 (massa distribuída do Fórmula Glória B4) mostra que o monolugar tem uma distribuição de pesos de 42% à frente e 58% atrás. Portanto, a massa exercida nas duas rodas da frente é igual à multiplicação da massa suspensa total por 42% e a massa exercida nas duas rodas de trás é igual à multiplicação da massa suspensa total por 58%. Sendo que a massa suportada por cada roda da frente é igual a metade da massa suspensa total exercida nas duas rodas da frente. Para cada roda de trás, o raciocínio é o mesmo. As massas suportadas sobre cada roda estão representadas na Equação 143 e na Equação 144:

$$m_{st1} = m_{st2} = \frac{m_{st} \times 0.42}{2} = \frac{427 \times 0.42}{2} = 89.67 \cong 90 \text{ kg}$$

Equação 143

$$m_{st3} = m_{st4} = \frac{m_{st} \times 0.58}{2} = \frac{427 \times 0.58}{2} = 123.83 \cong 124 \text{ kg}$$

Equação 144

Nota: Para confirmar, o somatório das quatro massas suspensas sobre cada roda ( $90+90+124+124 = 428 \text{ kg}$ ) tem que ser igual ao valor da massa suspensa total ( $427 \text{ kg}$ ). Esta diferença de  $1 \text{ kg}$  deve-se às aproximações consideradas para a massa suspensa total sobre cada roda.

Onde:

- $m_{st1}$  = Massa suspensa total sobre a roda da frente do lado esquerdo;
- $m_{st2}$  = Massa suspensa total sobre a roda da frente do lado direito;
- $m_{st3}$  = Massa suspensa total sobre a roda de trás do lado esquerdo;
- $m_{st4}$  = Massa suspensa total sobre a roda de trás do lado direito;
- $m_{st}$  = Massa suspensa total;

Aplicando a Equação 5 e substituindo o coeficiente de rigidez, a massa suspensa total sobre cada roda e a razão de amortecimento, obtiveram-se os valores apresentados na Tabela 17:

Tabela 17 - Coeficientes de amortecimento da suspensão.

	Coeficientes de amortecimento [Ns/m]
Suspensão roda frente lado esquerdo ( $c_1$ )	4518
Suspensão roda frente lado direito ( $c_2$ )	4518
Suspensão roda trás lado esquerdo ( $c_3$ )	5303
Suspensão roda trás lado direito ( $c_4$ )	5303

## 5.6 Constante de amortecimento dos pneus

*“O procedimento de caracterização de materiais empregando a Técnica de Excitação por Impulso consiste em excitar o corpo de prova com um leve impulso mecânico (uma pancada ou batida leve) e em calcular os módulos de elasticidade e o amortecimento a partir das frequências e da atenuação da resposta acústica.*

*A resposta acústica consiste no som emitido pelo corpo de prova e tem origem nas suas frequências naturais de vibração, frequências estas que dependem univocamente da massa, das dimensões, da geometria e dos módulos de elasticidade.*

*O amortecimento é calculado a partir da taxa de atenuação do som. Quanto maior o amortecimento, menor a duração do som.” (Atcp)*

Como não havia equipamento disponível, não foi possível calcular o coeficiente de amortecimento efetivo real.

Para prosseguir com as simulações foi necessário calcular o coeficiente de amortecimento efetivo, tendo-se seguido a metodologia apresentada no capítulo 5.5 (Constante de amortecimento da suspensão), ou seja, aplicou-se a Equação 5:

$$\xi = \frac{c}{2 \times m \times \omega_n} = \frac{c}{2 \times \sqrt{k \times m}}$$

Equação 5

Neste caso, o k representa o coeficiente de rigidez dos pneus de chuva (Tabela 10) e m a massa de cada roda (Tabela 12)

Aplicando a Equação 5 e substituindo o coeficiente de rigidez dos pneus, a massa de cada roda e a razão de amortecimento, obtiveram-se os valores exibidos na Tabela 18:

Tabela 18 - Coeficientes de amortecimento do pneu.

	Coeficientes de amortecimento [Ns/m]
Pneu frente lado esquerdo ( $c_{p1}$ )	1919
Pneu frente lado direito ( $c_{p2}$ )	1919
Pneu trás lado esquerdo ( $c_{p3}$ )	2283
Pneu trás lado direito ( $c_{p4}$ )	2283



## 5.7 Momentos de inércia

Para o cálculo exato dos momentos de inércia reais é preciso calcular o peso e o centro de gravidade de cada componente relacionando-os com o centro de gravidade do monolugar através do teorema de *Steiner*.

Neste estudo, aproximou-se o Fórmula Glória B4 a um paralelepípedo e utilizaram-se a Equação 8 para a obtenção do momento de inércia lateral ( $I_y$ ) e a Equação 9 para o longitudinal ( $I_x$ ):

$$I_y = \frac{m}{12} \times (h^2 + c^2)$$

Equação 8

$$I_x = \frac{m}{12} \times (h^2 + l^2)$$

Equação 9

Neste caso, h representa a altura do Fórmula Glória B4, c o comprimento, l a largura e m a massa suspensa total, estando os seus respetivos valores na Tabela 19.

Tabela 19 - Valores utilizados para o cálculo dos momentos de inércia. (Gloriacars)

	Valores
Altura (h)	0.700 m
Comprimento (c)	2.250 m
Largura (l)	1.380 m
Massa suspensa total ( $m_{st}$ )	427 kg

Para que os valores dos momentos de inércia calculados desta forma (aproximando o monolugar a um paralelepípedo) não diferissem muito da realidade, para o comprimento utilizou-se a distância entre eixos; relativamente à altura não se considerou o arco principal, mas sim a altura da carroçaria; e por último, quanto à largura foi utilizado o valor médio da largura de eixos. Os valores dos momentos de inércia assim calculados são apresentados na Tabela 20:

Tabela 20 - Valores dos momentos de inércia.

	Valores ( $\text{kgm}^2$ )
Momento de inércia lateral ( $I_y$ )	197.6
Momento de inércia longitudinal ( $I_x$ )	85.2

## 5.8 *Downforce*

Para o caso estático o valor da *downforce* ou força descendente é nulo uma vez que a força criada pelo vento foi desprezada.

Quando existem acelerações no carro, ou seja, transferência de massa lateral e/ou longitudinal, existe *downforce*. O valor desta é dado pela multiplicação da massa suspensa total, pela aceleração gravítica e pelo número de “Gs” atingidos (Equação 145):

$$Downforce = m_{st} \times g \times n^o \text{ de "G"}$$

Equação 145

Quando existem acelerações no monolugar a força descendente, para efeitos de cálculo, foi considerada de 2 G, uma vez que este valor apenas poderia ser determinado através de sensores nas várias situações reais.

A distribuição da *downforce* pelo Fórmula Glória B4, foi aproximada pela Figura 46, isto porque o monolugar disponível para estudo não possui difusor. Caso possuísse, a distribuição seria feita segundo a Figura 19 do capítulo 2.6 (*Downforce*).

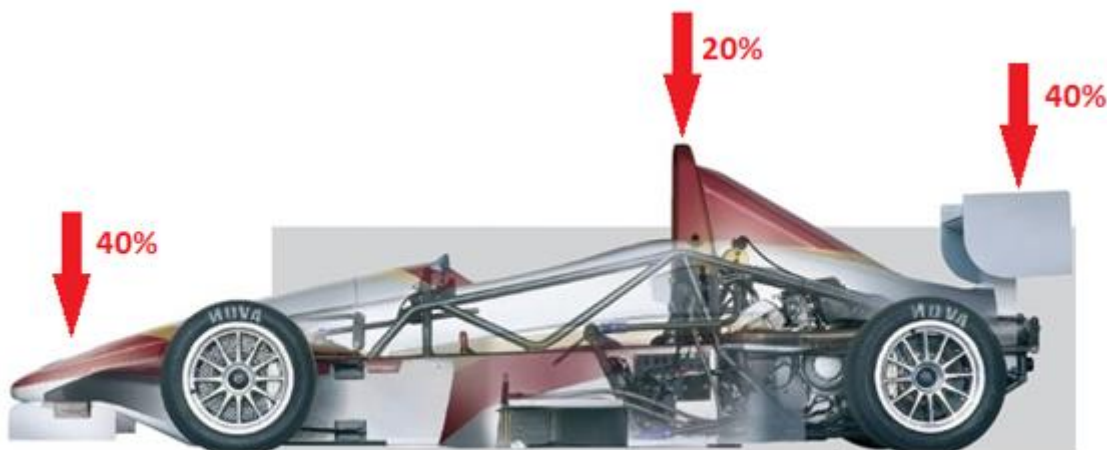


Figura 46 - Percentagens admitidas de downforce num fórmula sem difusor.

## 6 Simulações

Para conseguir simular o comportamento do monolugar disponível para estudo foi preciso introduzir o valor de cada variável. Para tal, foi criado um quadro resumo com os valores destas – Tabela 21.

Tabela 21 - Valores utilizados nas simulações.

#	Símbolo	Designação	Valor
1	$k_1$	Constante de rigidez da suspensão da roda 1	70000 N/m
2	$k_2$	Constante de rigidez da suspensão da roda 2	70000 N/m
3	$k_3$	Constante de rigidez da suspensão da roda 3	70000 N/m
4	$k_4$	Constante de rigidez da suspensão da roda 4	70000 N/m
5	$c_1$	Constante de amortecimento da suspensão da roda 1	4518 Ns/m
6	$c_2$	Constante de amortecimento da suspensão da roda 2	4518 Ns/m
7	$c_3$	Constante de amortecimento da suspensão da roda 3	5303 Ns/m
8	$c_4$	Constante de amortecimento da suspensão da roda 4	5303 Ns/m
9	$k_{p1}$	Constante de rigidez do pneu da roda 1	103290 N/m
10	$k_{p2}$	Constante de rigidez do pneu da roda 2	103290 N/m
11	$k_{p3}$	Constante de rigidez do pneu da roda 3	114900 N/m
12	$k_{p4}$	Constante de rigidez do pneu da roda 4	114900 N/m
13	$c_{p1}$	Constante de amortecimento do pneu da roda 1	1919 Ns/m
14	$c_{p2}$	Constante de amortecimento do pneu da roda 2	1919 Ns/m
15	$c_{p3}$	Constante de amortecimento do pneu da roda 3	2283 Ns/m

Projeto da Suspensão Estudo do Equilíbrio Dinâmico de uma Viatura Fórmula

16	$c_{p4}$	Constante de amortecimento do pneu da roda 4	2283 Ns/m
17	$L_{fe}$	Distância eixo longitudinal dianteiro à roda 1	0.700 m
18	$L_{fd}$	Distância eixo longitudinal dianteiro à roda 2	0.700 m
19	$L_{te}$	Distância eixo longitudinal traseiro à roda 3	0.680 m
20	$L_{td}$	Distância eixo longitudinal traseiro à roda 4	0.680 m
21	$a$	Distância eixo lateral ao dianteiro	1.307 m
22	$b$	Distância eixo lateral ao traseiro	0.943 m
23	$a_f$	Distância eixo dianteiro à asa frontal	0.600 m
24	$b_t$	Distância eixo traseiro à asa traseira	0.350 m
25	$h_{cg}$	Altura centro de gravidade	0.314 m
26	$m_1$	Massa da roda 1	11 kg
27	$m_2$	Massa da roda 2	11 kg
28	$m_3$	Massa da roda 3	14 kg
29	$m_4$	Massa da roda 4	14 kg
30	$m_{formula}$	Massa total do Fórmula Glória B4 (sem piloto)	414 kg
31	$a_x$	Aceleração longitudinal equilíbrio estático	0 m/s <sup>2</sup>
32	$a_y$	Aceleração lateral equilíbrio estático	0 m/s <sup>2</sup>
33	$downforce$	$Downforce$ equilíbrio estático (transferências de massa)	0 G (2G) <sup>6</sup>
34	$perc\_downforce\_frente$	Percentagem de $downforce$ na asa dianteira	0.40
35	$perc\_downforce\_trás$	Percentagem de $downforce$ na asa traseira	0.40
36	$perc\_downforce\_corpo$	Percentagem de $downforce$ no corpo do monolugar	0.20
37	$A_{barra\_di}$	Medida A da barra estabilizadora dianteira	0.140 m
38	$B_{barra\_di}$	Medida B da barra estabilizadora dianteira	0.300 m

<sup>6</sup> Apenas se considera o valor de 0G para o caso estático, ou seja, para o capítulo 6.1

39	$C_{\text{barra\_di}}$	Medida C da barra estabilizadora dianteira	0.140 m
40	$D_{\text{barra\_di}}$	Medida D da barra estabilizadora dianteira	0.020 m
41	$A_{\text{barra\_tr}}$	Medida A da barra estabilizadora traseira	0.140 m
42	$B_{\text{barra\_tr}}$	Medida B da barra estabilizadora traseira	0.300 m
43	$C_{\text{barra\_tr}}$	Medida C da barra estabilizadora traseira	0.140 m
44	$D_{\text{barra\_tr}}$	Medida D da barra estabilizadora traseira	0.020 m
45	$m_{\text{piloto}}$	Massa do piloto	63 kg
46	$c$	Comprimento considerado no cálculo do momento de inércia	2.250 m
47	$h$	Altura considerado no cálculo do momento de inércia	0.700 m
48	$l$	Largura considerado no cálculo do momento de inércia	1.380 m

Considerações:

- Pneu de chuva a 35 psi e à temperatura ambiente (exceto na análise da influência da pressão dos pneus em que se utiliza 30, 35 e 40 psi);
- Utilização da mola preta na suspensão – 70 kN/m (exceto na análise da influência da rigidez da suspensão em que se utiliza 50, 70 e 90 kN/m);
- Razão de amortecimento de 0.9;
- Existem oscilações nos valores dos gráficos nos instantes iniciais uma vez que a simulação pressupõe que o monolugar é largado de uma posição suspensa, provocando estas oscilações ao cair no solo. Os valores são obtidos na zona em que as curvas estabilizam.

Nota:

O índice 1 é relativo à roda da frente do lado esquerdo;

O índice 2 é relativo à roda da frente do lado direito;

O índice 3 é relativo à roda de trás do lado esquerdo;

O índice 4 é relativo à roda da frente do lado direito.

## 6.1 Equilíbrio estático

Esta simulação teve como objetivo a determinação da força em cada roda quando não existem acelerações associadas, ou seja, caso estático – Figura 80 a Figura 82 e respetivos valores na Tabela 22.

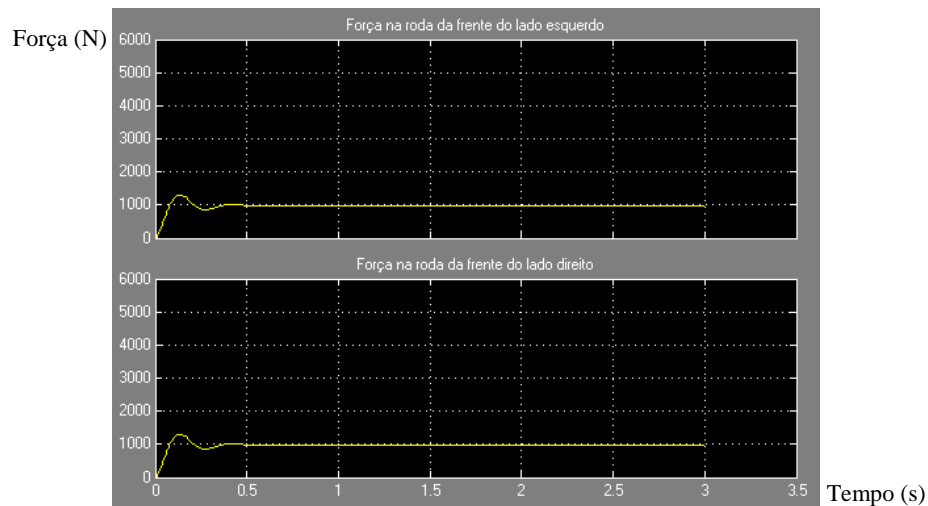


Figura 80 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso estático.

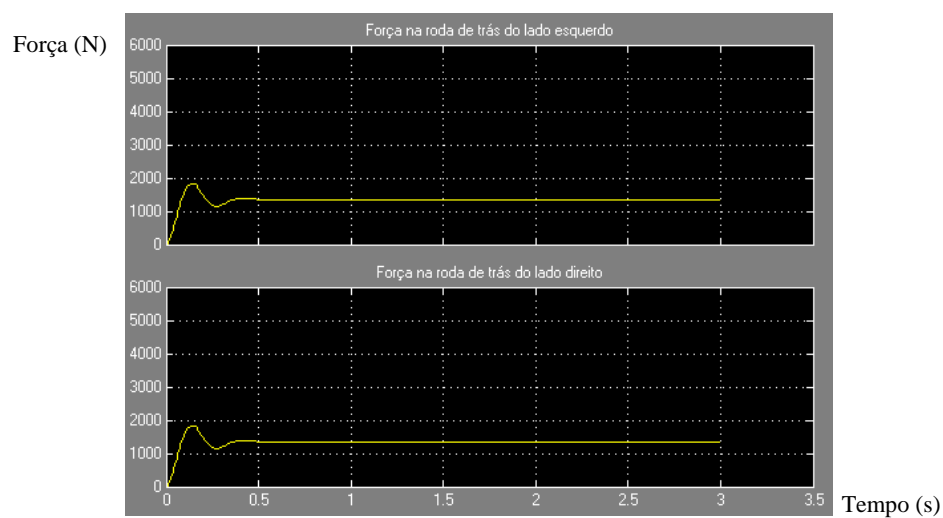


Figura 81 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso estático.

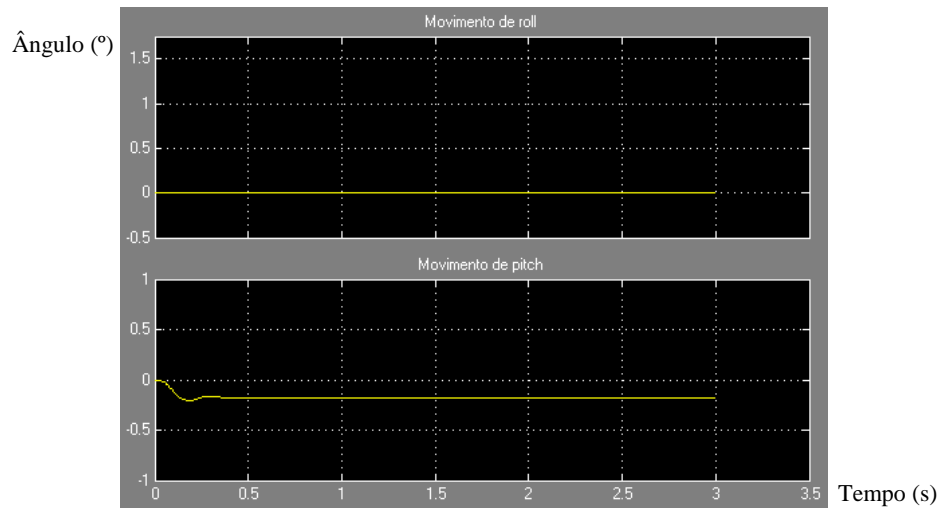


Figura 82 – Gráfico com os ângulos para o caso estático.

Tabela 22 - Valores obtidos para o caso estático.

	Valores obtidos (N)
$F_{kp1}$	986
$F_{kp2}$	986
$F_{kp3}$	1354
$F_{kp4}$	1354
	Valores obtidos (°)
<i>Roll</i>	0
<i>Pitch</i>	-0.18

Como se pode comprovar pela Equação 146, o somatório das forças nos pneus obtidas pelo modelo matemático tem uma diferença mínima para a situação real obtida com as 4 balanças (Equação 147) o que traduz fiabilidade. Para além das forças, o valor do ângulo de *roll* está correto uma vez que o Fórmula Glória B4 é simétrico em relação ao eixo longitudinal; e o ângulo de *pitch* é negativo, ou seja, a distância da traseira ao solo é inferior à distância da frente ao solo.

$$F_{kp1} + F_{kp2} + F_{kp3} + F_{kp4} = 986 + 986 + 1354 + 1354 = 4680 \text{ N}$$

Equação 146

$$P_{total} = m_{total} \times g = 477 \times 9.81 = 4679 \text{ N}$$

Equação 147

## 6.2 Valores de referência - Sem acelerações com *downforce* igual a 2

Esta simulação teve como objetivo a determinação do valor de pitch que irá servir de referência para todas as simulações com exceção da simulação relativa à influência da *downforce* (capítulo 6.7). Para tal, efetuou-se uma simulação considerando os valores da Tabela 21 à exceção da *downforce* em que o seu valor foi considerado de 2 G, obtendo os gráficos presentes da Figura 83 à Figura 85 e os seus respetivos valores na Tabela 23.

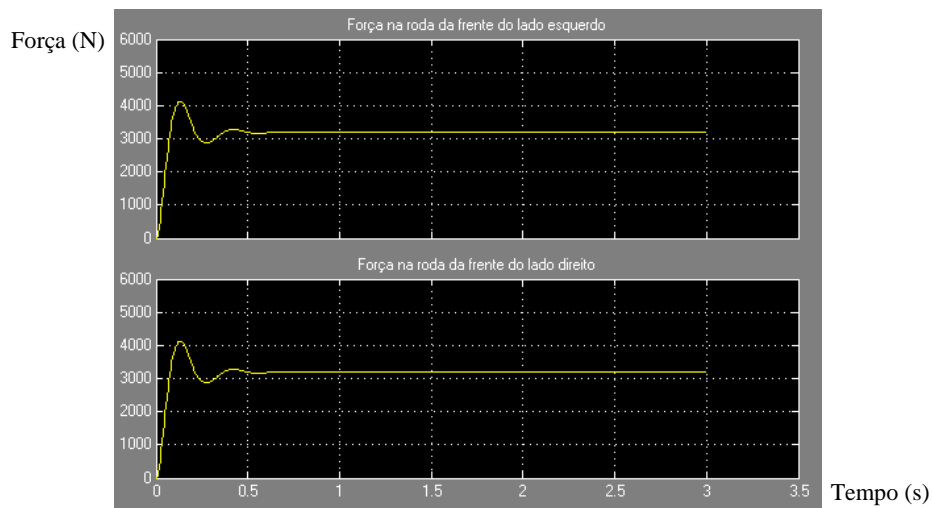


Figura 83 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso de referência (*downforce* igual a 2 G).

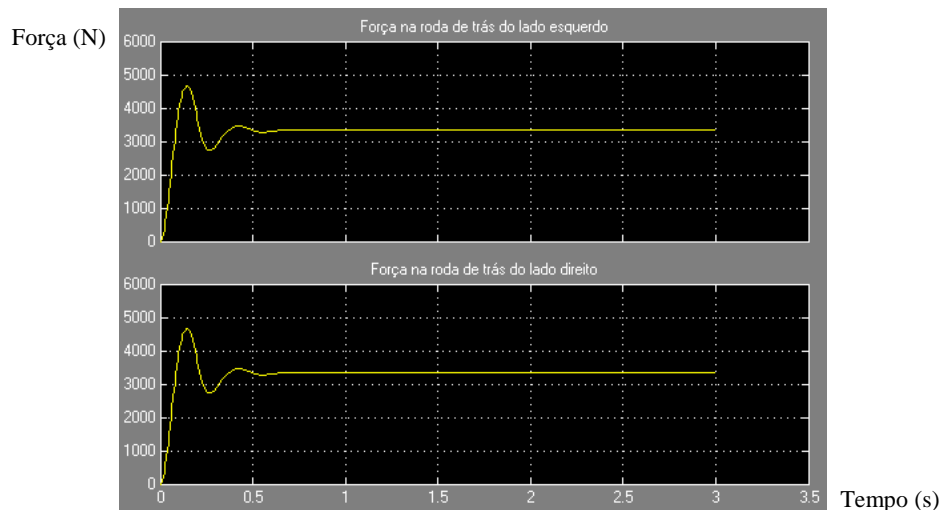


Figura 84 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso de referência (*downforce* igual a 2 G).



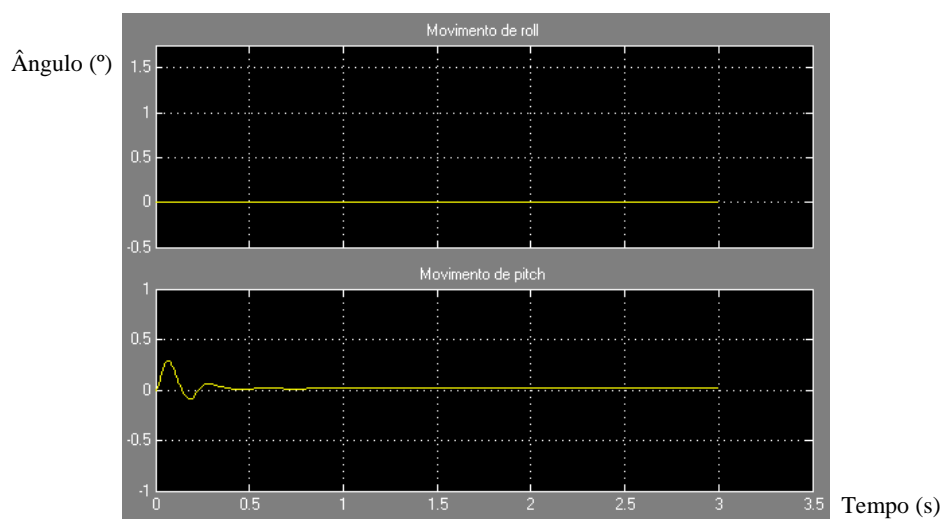


Figura 85 - Gráfico com os ângulos para o caso de referência (*downforce* igual a 2 G).

Tabela 23 - Valores obtidos para o caso de referência.

	Valores obtidos (N)
$F_{kp1}$	3199
$F_{kp2}$	3199
$F_{kp3}$	3331
$F_{kp4}$	3331
	Valores obtidos (°)
<i>Roll</i>	0
<i>Pitch</i>	0.01

O somatório das forças dos pneus obtido na simulação (Equação 148) é semelhante ao valor calculado pela Equação 149, o que comprova que o programa continua fiável quando se adiciona o valor de *downforce*.

$$F_{kp1} + F_{kp2} + F_{kp3} + F_{kp4} = 3199 + 3199 + 3331 + 3331 = 13060 \text{ N}$$

Equação 148

$$P_{total} = (m_{total} + downforce \times m_{st}) \times g = (477 + 2 \times 427) \times 9.81 = 13057 \text{ N}$$

Equação 149

Para além das forças, o valor do ângulo de *roll* está correto uma vez que se mantem a simetria do monolugar apesar do incremento de *downforce*.

O ângulo de *pitch* aumentou para  $0.01^\circ$ , ficando o carro inclinado para a frente, ou seja, a distância da frente ao solo é agora menor que a distância da traseira ao solo.

Este aumento deve-se ao facto da distância da asa frontal ao centro de gravidade ser maior que a distância deste à asa traseira. Como o momento criado pela *downforce* é o produto da força descendente pela distância ao centro de gravidade, e tendo sido considerada uma força igualmente distribuída pelas duas asas (40% da *downforce*), o ângulo de *pitch* só poderia ser influenciado pela distância das asas ao centro de gravidade.

Nota: este caso é hipotético, uma vez que apenas existe *downforce* quando existem acelerações (desprezando o efeito do vento).

### 6.3 Comportamento em curva

Para o cálculo da aceleração lateral é necessário saber a velocidade ( $v$ ) a que o carro dá a curva e o raio de curvatura desta ( $r$ ) (Equação 150):

$$a_y = \frac{v^2}{r}$$

Equação 150

Considerando uma curva com um raio de 50 metros e uma velocidade de 100 km/h (aproximadamente 27.8 m/s), aplicando a Equação 150, obtém-se uma aceleração lateral de aproximadamente 15.5 m/s<sup>2</sup>.

No caso do monolugar em estudo, uma vez que é simétrico (ângulo de *roll* nulo), foi indiferente simular uma curva à esquerda ( $a_y$  positiva) ou à direita ( $a_y$  negativa) já que o comportamento do carro seria idêntico.

Quanto à aceleração longitudinal, uma vez que existe ângulo de *pitch*, foi necessário simular a situação de aceleração ( $a_x$  negativa) e travagem ( $a_x$  positiva).

Como se pode ver na Figura 26 do capítulo 2.8.2, uma curva pode ser dividida em 5 partes diferentes. Para ser analisada em mais pormenor, este capítulo foi dividido nos subcapítulos seguintes (em que se simulou as 5 etapas de uma curva à esquerda):

1. Apenas aceleração longitudinal (travagem);
2. Aceleração lateral e longitudinal (entrada em curva);
3. Só aceleração lateral;
4. Aceleração lateral e longitudinal (saída de curva);
5. Apenas aceleração longitudinal (aceleração);

### 6.3.1 Aceleração longitudinal (travagem)

O ângulo de pitch ( $\theta$ ) representado na Figura 39 do capítulo 3.3 foi considerado positivo quando o carro se inclina para a frente. Por este motivo, a aceleração  $a_x$  é positiva no caso da travagem. Nesta simulação (Figura 86 a Figura 88 e respetivos valores na Tabela 24) foi considerado uma aceleração longitudinal igual a  $20 \text{ m/s}^2$ .

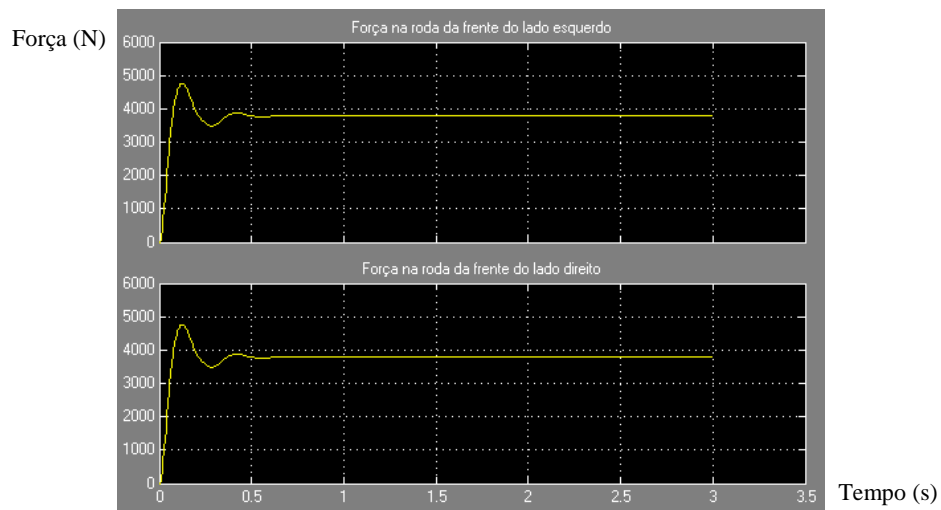


Figura 86 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso de travagem.

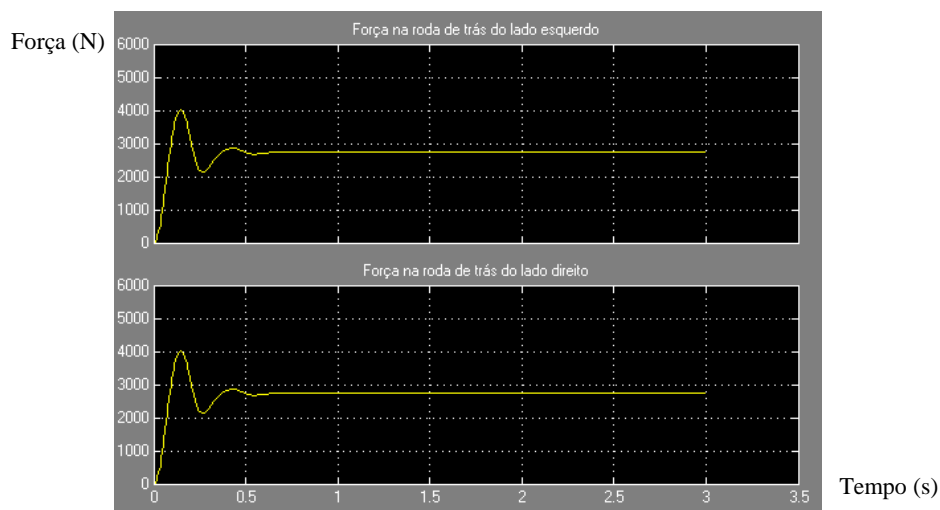


Figura 87 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso de travagem.

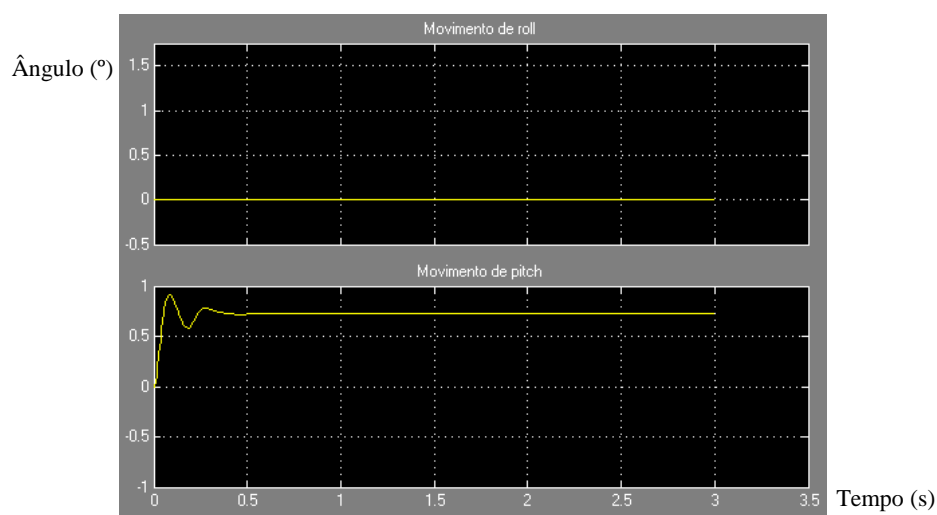


Figura 88 - Gráfico com os ângulos para o caso de travagem.

Tabela 24 - Valores obtidos para a travagem.

	Valores obtidos (N)
$F_{kp1}$	3794
$F_{kp2}$	3794
$F_{kp3}$	2734
$F_{kp4}$	2734
	Valores obtidos (°)
<i>Roll</i>	0
<i>Pitch</i>	0.73

$$F_{kp1} \text{ na travagem} - F_{kp1} \text{ de referência} = 3794 - 3199 = 595 \text{ N}$$

Equação 151

$$F_{kp3} \text{ de referência} - F_{kp3} \text{ na travagem} = 3331 - 2734 = 597 \text{ N}$$

Equação 152

O valor do ângulo de *roll* continua nulo, uma vez que não existem acelerações laterais.

O valor da aceleração longitudinal é positivo (travagem) devido à existência de transferência das rodas traseiras para as dianteiras, como se pode confirmar através da Equação 151 e da Equação 152. O valor do ângulo de *pitch* é maior uma vez que existe transferência das rodas traseiras para as dianteiras, ou seja, o Fórmula Glória B4 inclina para a frente.

### 6.3.2 Aceleração lateral e longitudinal (entrada em curva)

Com este subcapítulo pretendeu-se simular a entrada do monolugar numa curva à esquerda, ou seja, o carro inclina para a frente e para a direita. Portanto, foi considerada uma aceleração lateral de  $15.5 \text{ m/s}^2$  e uma longitudinal de  $10 \text{ m/s}^2$ , obtendo os gráficos da Figura 89 até à Figura 91 e os respetivos valores apresentados na Tabela 25.

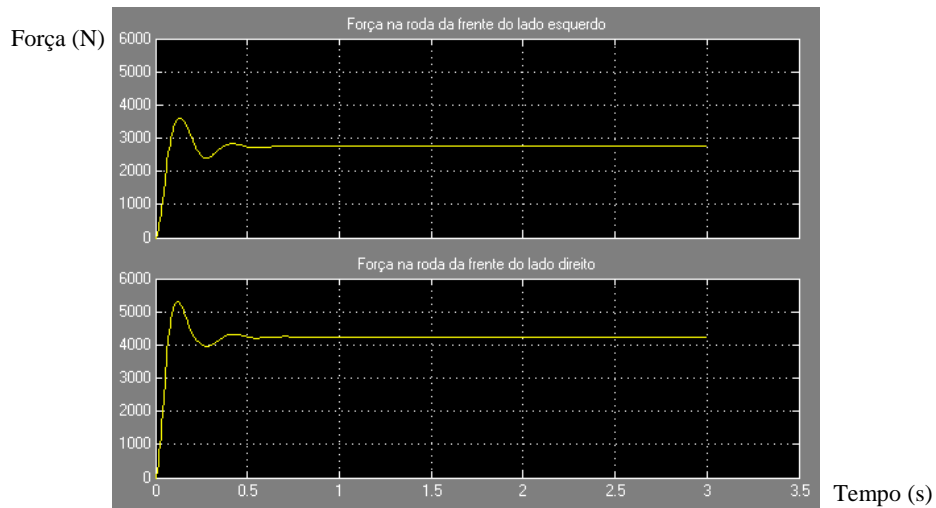


Figura 89 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso de entrada em curva.

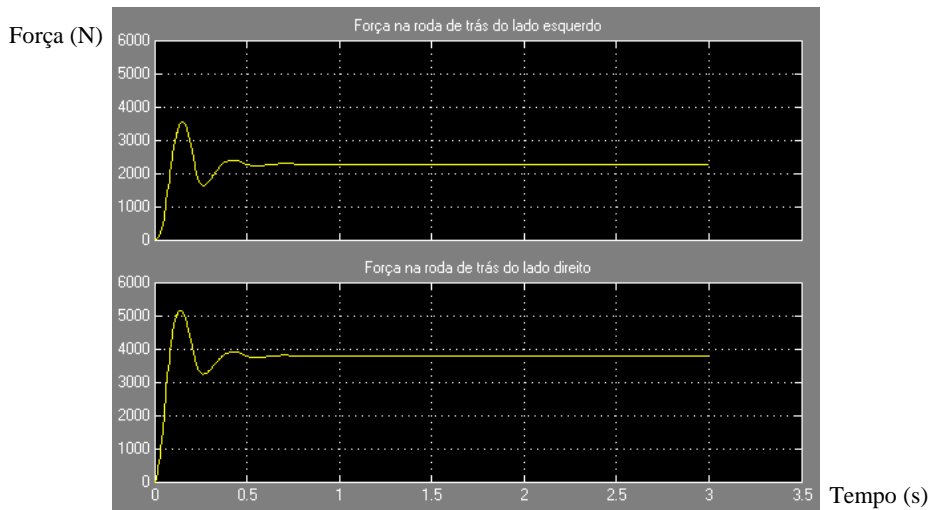


Figura 90 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso de entrada em curva.

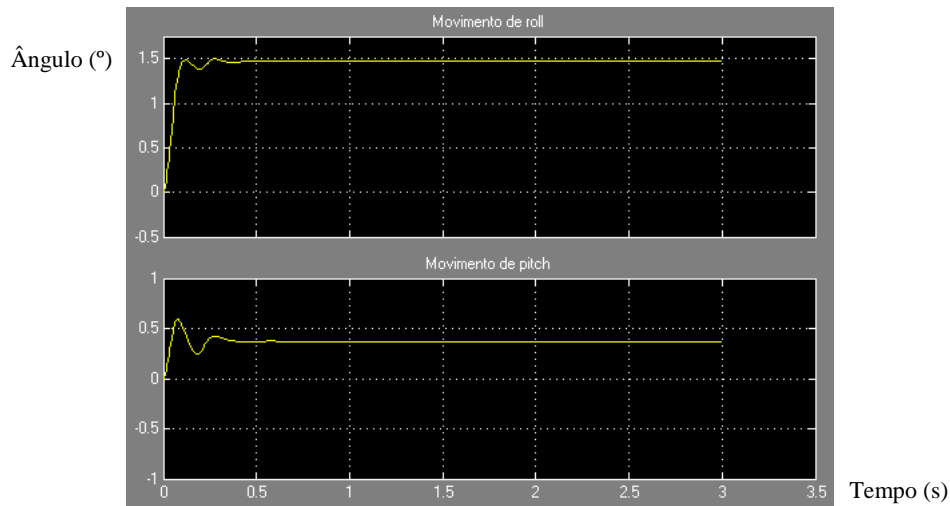


Figura 91 - Gráfico com os ângulos para o caso de entrada em curva.

Tabela 25 - Valores obtidos para entrada em curva.

	Valores obtidos (N)
$F_{kp1}$	2749
$F_{kp2}$	4244
$F_{kp3}$	2275
$F_{kp4}$	3789
	Valores obtidos (°)
<i>Roll</i>	1.47
<i>Pitch</i>	0.37

Como nesta simulação existiu aceleração lateral, o ângulo de *roll* ( $\varphi$ ) diferiu de zero. Este valor é positivo uma vez que o monolugar se encontra a dar uma curva para a esquerda (inclina para a direita).

O valor do ângulo de *pitch* diminuiu, uma vez que a aceleração longitudinal passou de 20 m/s<sup>2</sup> para 10 m/s<sup>2</sup>.

Neste caso, a roda mais sobrecarregada é a roda da frente do lado direito (roda 2), uma vez que existiu transferência de massa do lado esquerdo para o direito e da traseira para a frente.

### 6.3.3 Aceleração lateral

Com este subcapítulo pretendeu-se simular a parte da curva em que apenas existe aceleração lateral ( $a_y$  igual a  $15.5 \text{ m/s}^2$ ), ou seja, não existe travagem nem aceleração. Para esta simulação obtiveram-se os gráficos presentes na Figura 92 até à Figura 94 e os respetivos valores presentes na Tabela 26.

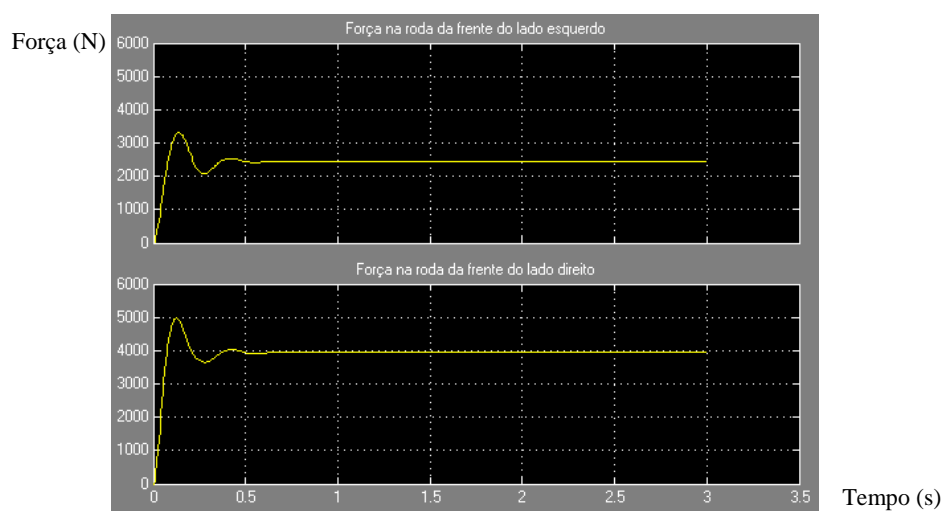


Figura 92 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso em que apenas existe aceleração lateral.

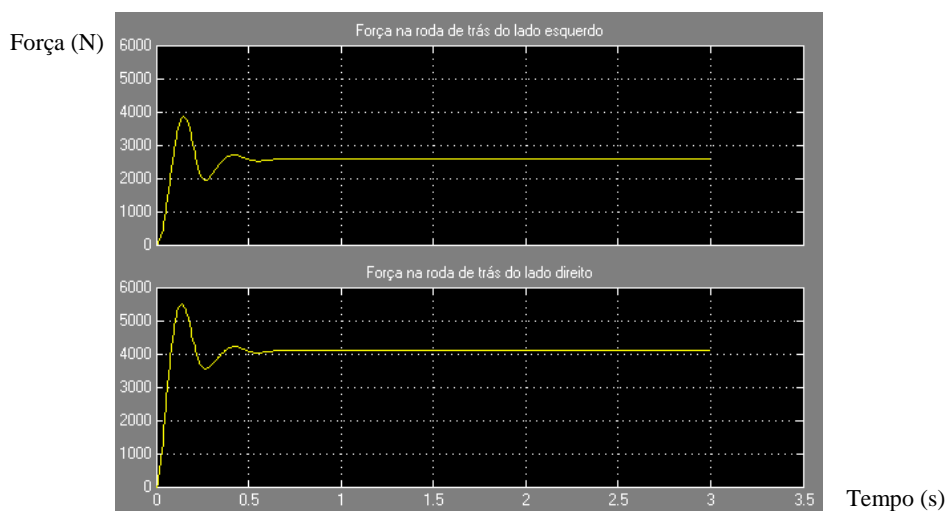


Figura 93 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso em que apenas existe aceleração lateral.



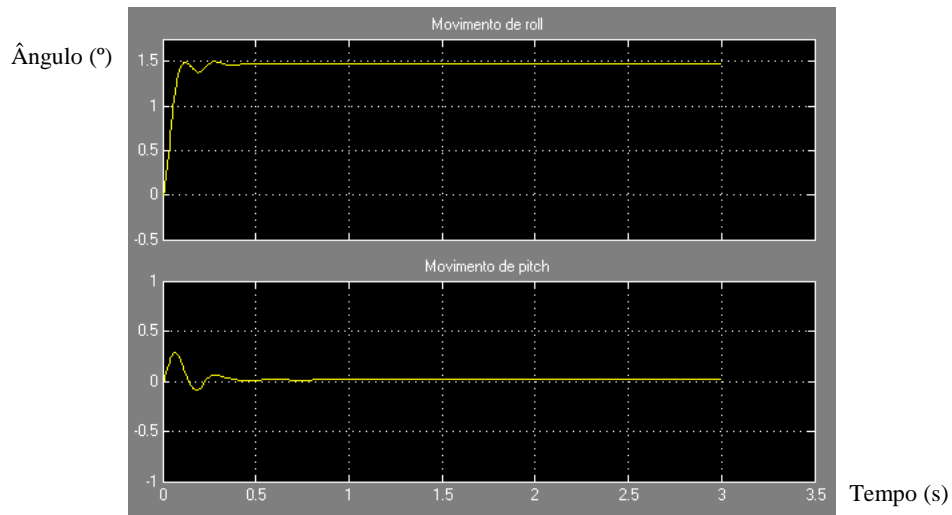


Figura 94 - Gráfico com os ângulos para o caso em que apenas existe aceleração lateral.

Tabela 26 - Valores obtidos para aceleração lateral.

	Valores obtidos (N)
$F_{kp1}$	2451
$F_{kp2}$	3946
$F_{kp3}$	2573
$F_{kp4}$	4087
	Valores obtidos (°)
<i>Roll</i>	1.47
<i>Pitch</i>	0.01

$$F_{kp1} \text{ de referência} - F_{kp1} \text{ só com } a_y = 3199 - 2451 = 748 \text{ N}$$

Equação 153

$$F_{kp2} \text{ só com } a_y - F_{kp2} \text{ de referência} = 3946 - 3199 = 747 \text{ N}$$

Equação 154

O valor do ângulo de *pitch* é igual ao valor obtido no capítulo 6.2 (Valores de referência - Sem acelerações com *downforce* igual a 2), uma vez que não existem acelerações longitudinais.

Numa curva à esquerda, o valor da aceleração lateral é positivo (inclinação à direita) visto que existe transferência das rodas da esquerda para as da direita como se pode confirmar através da Equação 153 e da Equação 154.

### 6.3.4 Aceleração lateral e longitudinal (saída de curva)

Com este subcapítulo pretendeu-se simular a saída do Fórmula Glória B4 numa curva à esquerda, ou seja, o carro inclina para trás e para a direita. Portanto, iremos considerar uma aceleração lateral de  $15.5 \text{ m/s}^2$  e uma longitudinal de  $-10 \text{ m/s}^2$  (negativo porque o monolugar está a acelerar), obtendo os gráficos desde a Figura 95 até à Figura 97 e os respetivos valores na Tabela 27.

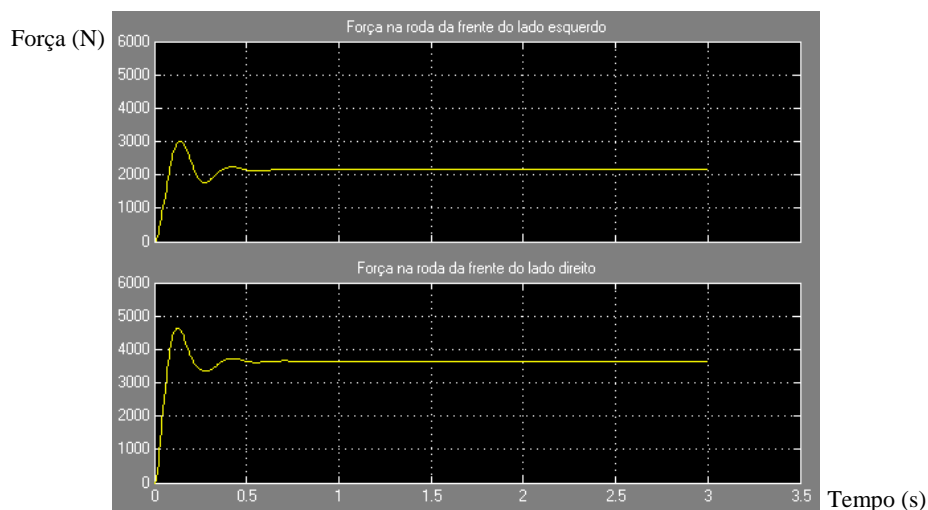


Figura 95 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso de saída de curva.

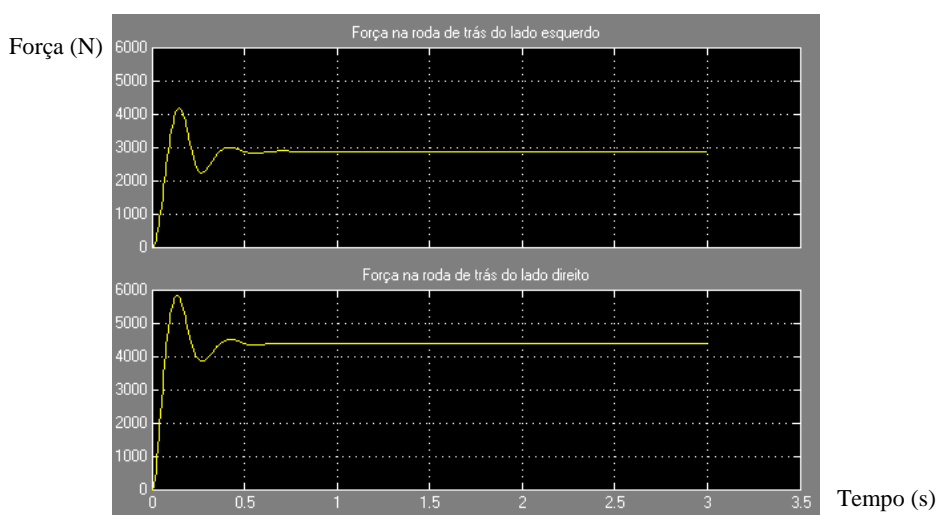


Figura 96 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso de saída de curva.

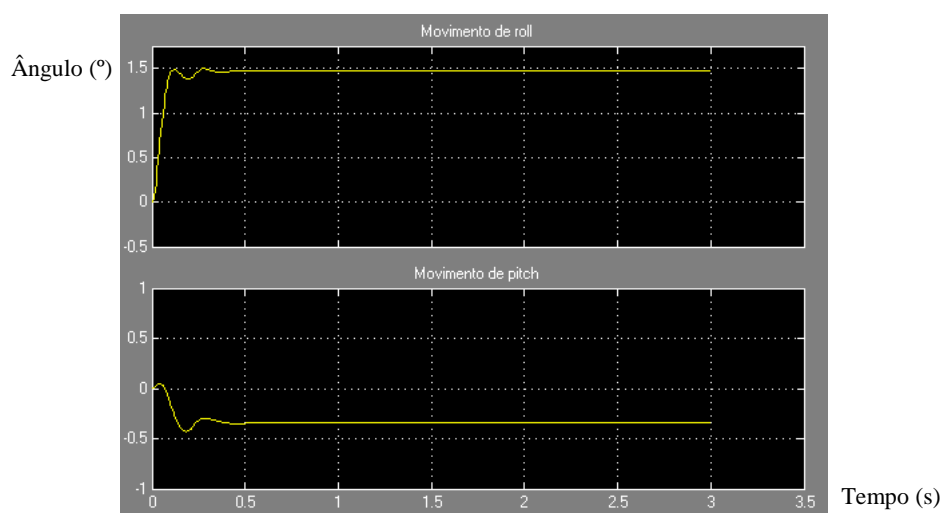


Figura 97 - Gráfico com os ângulos para o caso de saída de curva.

Tabela 27 - Valores obtidos para saída de curva.

	Valores obtidos (N)
$F_{kp1}$	2153
$F_{kp2}$	3648
$F_{kp3}$	2871
$F_{kp4}$	4385
	Valores obtidos (°)
<i>Roll</i>	1.47
<i>Pitch</i>	-0.34

Como nesta simulação existiu a mesma aceleração lateral que na simulação anterior, o ângulo de *roll* ( $\varphi$ ) manteve-se inalterado.

O valor do ângulo de *pitch* diminuiu, ficando negativo, uma vez que a aceleração longitudinal foi de  $-10 \text{ m/s}^2$  (caso de aceleração), inclinando para trás.

Neste caso, a roda mais sobrecarregada é a roda de trás do lado direito, uma vez que existiu transferência de massa do lado esquerdo para o direito e da frente para a traseira.

### 6.3.5 Aceleração longitudinal (aceleração)

O ângulo de pitch ( $\theta$ ) representado na Figura 39 do capítulo 3.3 foi considerado positivo quando o carro se inclina para a frente. Por este motivo, a aceleração  $a_x$  é negativa (aceleração). Nesta simulação (Figura 98 a Figura 100 e respetivos valores na Tabela 28) foi considerado uma aceleração longitudinal igual a  $-20 \text{ m/s}^2$ .

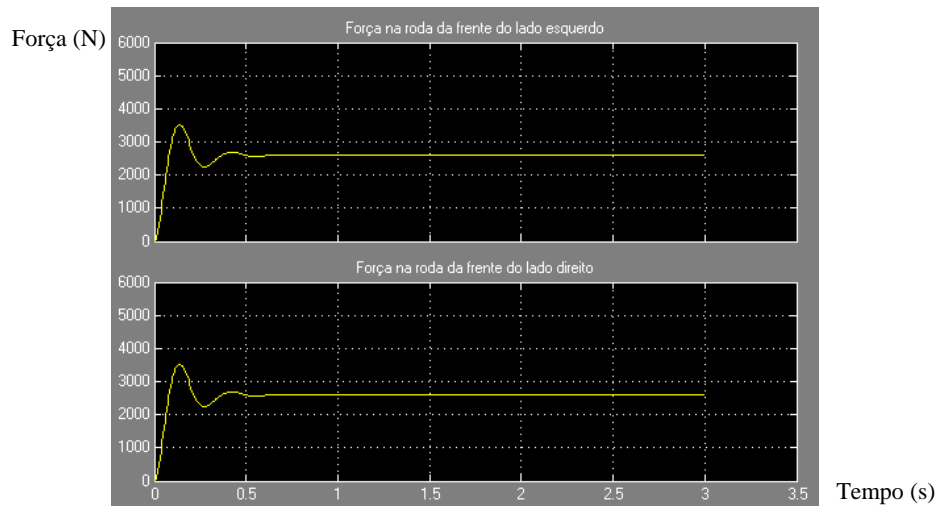


Figura 98 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso de aceleração.

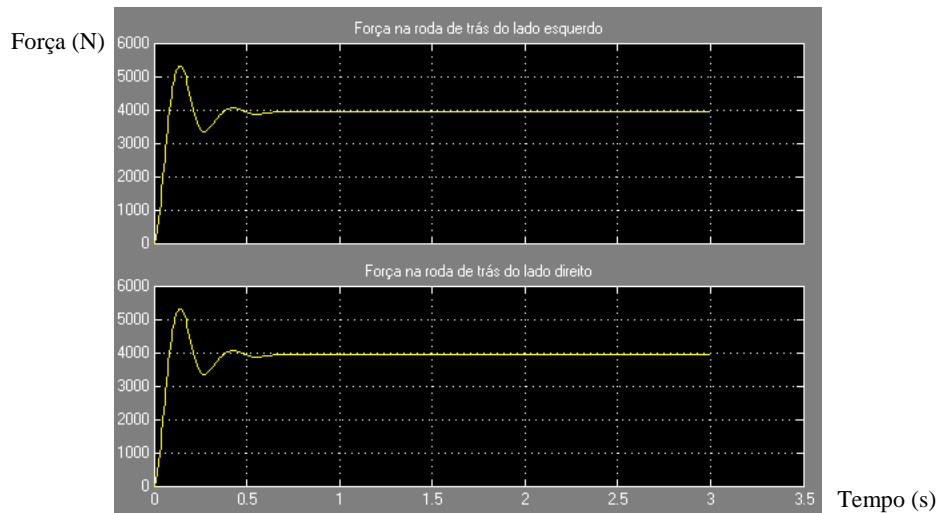


Figura 99 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso de aceleração.

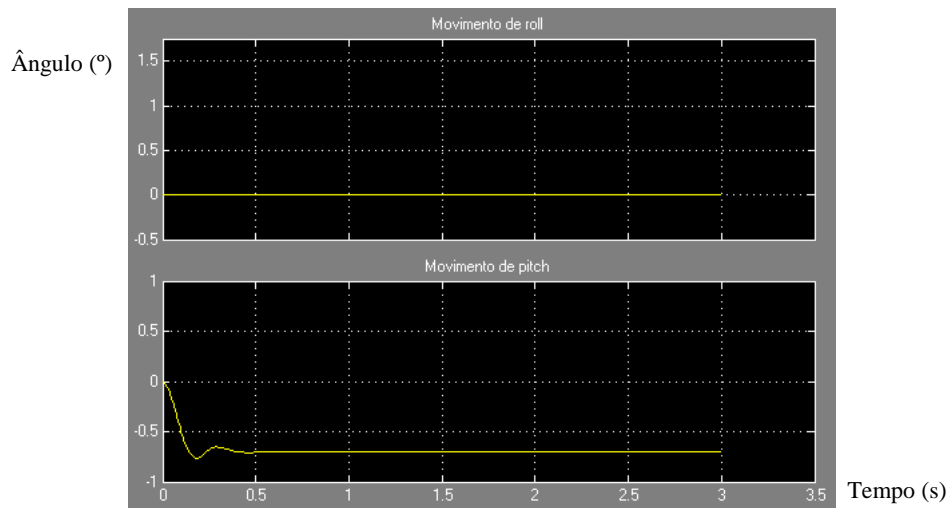


Figura 100 - Gráfico com os ângulos o caso de aceleração.

Tabela 28 - Valores obtidos para a aceleração.

	Valores obtidos (N)
$F_{kp1}$	2603
$F_{kp2}$	2603
$F_{kp3}$	3926
$F_{kp4}$	3926
	Valores obtidos (°)
<i>Roll</i>	0
<i>Pitch</i>	-0.70

$$F_{kp1} \text{ de referência} - F_{kp1} \text{ na aceleração} = 3199 - 2603 = 596 \text{ N}$$

Equação 155

$$F_{kp3} \text{ na travagem} - F_{kp3} \text{ de referência} = 3926 - 3331 = 595 \text{ N}$$

Equação 156

O valor do ângulo de *roll* é nulo, uma vez que não existem acelerações laterais e o Fórmula Glória B4 é simétrico em relação ao eixo longitudinal.

O valor da aceleração longitudinal é negativo (aceleração) devido à existência de transferência das rodas dianteiras para as traseiras, como se pode confirmar através da Equação 155 e da Equação 156. O valor do ângulo de *pitch* é menor uma vez que existe transferência das rodas dianteiras para as traseiras, ou seja, o monolugar inclina para trás.

## 6.4 Influência da rigidez da suspensão

Este teste teve como objetivo analisar o comportamento dinâmico para diferentes valores de rigidez da suspensão. Para tal, foi dividido em três subcapítulos, onde se analisaram separadamente a suspensão da frente, a traseira e a suspensão global.

Para este estudo, apenas se analisou o ângulo de *pitch*. As forças presentes nas rodas e o ângulo de *roll* mantiveram-se iguais ao capítulo 6.2 (Valores de referência - Sem acelerações com *downforce* igual a 2) devido ao facto de não se ter alterado a massa do monolugar, nem a *downforce*, nem se terem considerado acelerações que provocariam transferências de massa de umas rodas para as outras.

### 6.4.1 Rigidez da suspensão da frente

Para analisar a rigidez da suspensão dianteira, fixou-se, numa primeira fase, o valor da suspensão traseira e diminuiu-se o valor da dianteira para 50000 kN/m (mola branca), obtendo uma variação do ângulo de *pitch* – gráfico da Figura 101; numa segunda fase, fixou-se novamente o valor da suspensão traseira e aumentou-se o da dianteira para 90000 kN/m (mola amarela), obtendo uma variação do ângulo de *pitch* – gráfico da Figura 102. Os valores foram recolhidos na Tabela 29 que se encontra no capítulo 6.4.3 (Rigidez da suspensão).

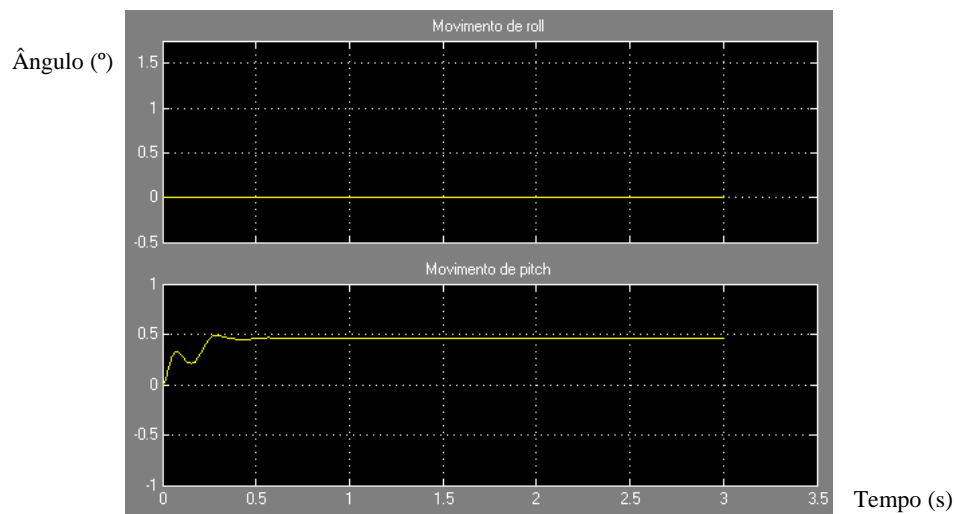


Figura 101 - Gráfico com os ângulos para as molas brancas na suspensão da frente.

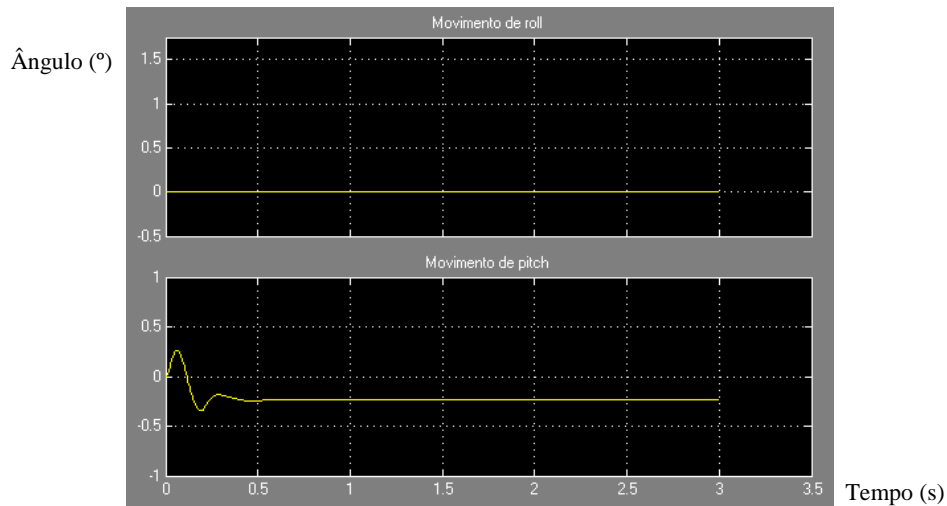


Figura 102 - Gráfico com os ângulos para as molas amarelas na suspensão da frente.

Através dos gráficos presentes na Figura 101 e na Figura 102, foi possível concluir que quanto maior a rigidez das molas da suspensão dianteira, menor será o ângulo de *pitch*; e quanto menor a rigidez, maior será o ângulo de *pitch*.

#### 6.4.2 Rigidez da suspensão de trás

Para a análise da suspensão traseira, fez-se o oposto, ou seja, fixou-se o valor da suspensão dianteira e alterou-se o valor da suspensão traseira para a mola branca (Figura 103) e para a mola amarela (Figura 104).

Os valores foram reunidos na Tabela 29 que se encontra no capítulo 6.4.3 (Rigidez da suspensão).

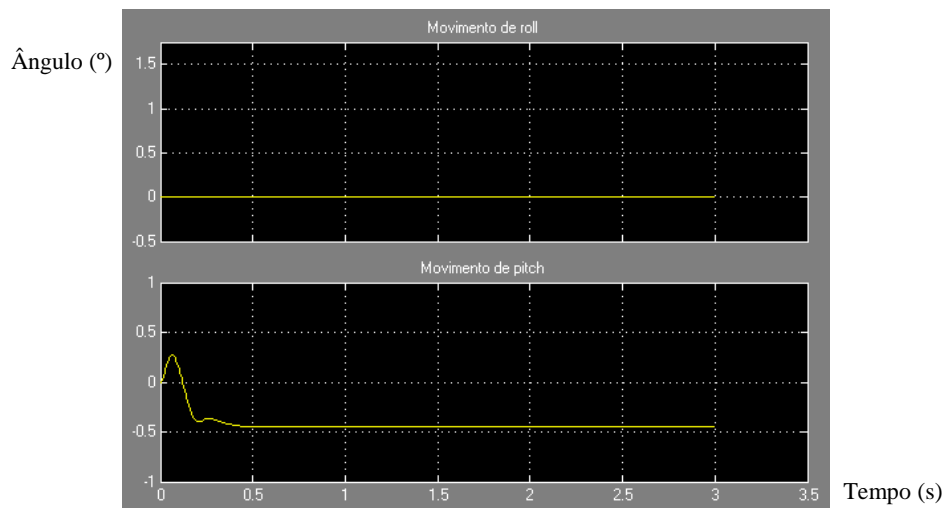


Figura 103 - Gráfico com os ângulos para as molas brancas na suspensão de trás.

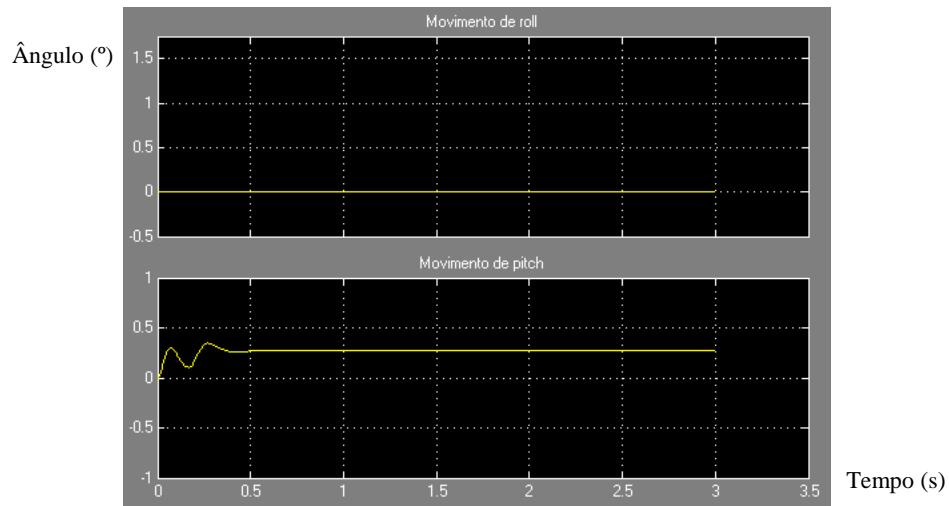


Figura 104 - Gráfico com os ângulos para as molas amarelas na suspensão de trás.

Através dos gráficos presentes na Figura 103 e na Figura 104, foi possível concluir que quanto maior a rigidez das molas da suspensão traseira, maior será o ângulo de *pitch*; e quanto menor a rigidez, menor será o ângulo de *pitch*.

#### 6.4.3 Rigidez da suspensão

Para finalizar a análise da rigidez da suspensão, alterou-se o valor de rigidez de ambas as suspensões em simultâneo, obtendo para as molas brancas, o gráfico da Figura 105, e para as molas amarelas, o gráfico da Figura 106.

Os valores de todas as simulações efetuadas neste capítulo (Influência da rigidez da suspensão) encontram-se na Tabela 29.

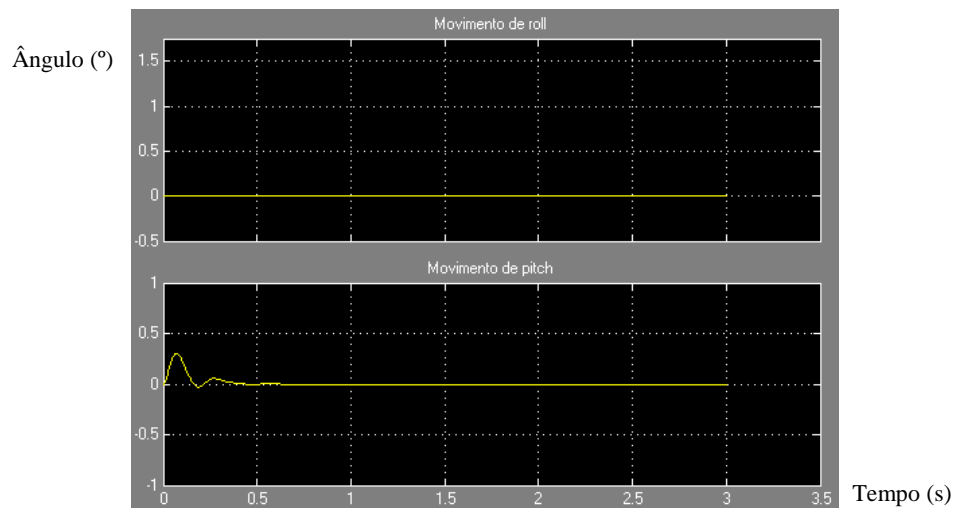


Figura 105 - Gráfico com os ângulos para as molas brancas em todas as suspensões.



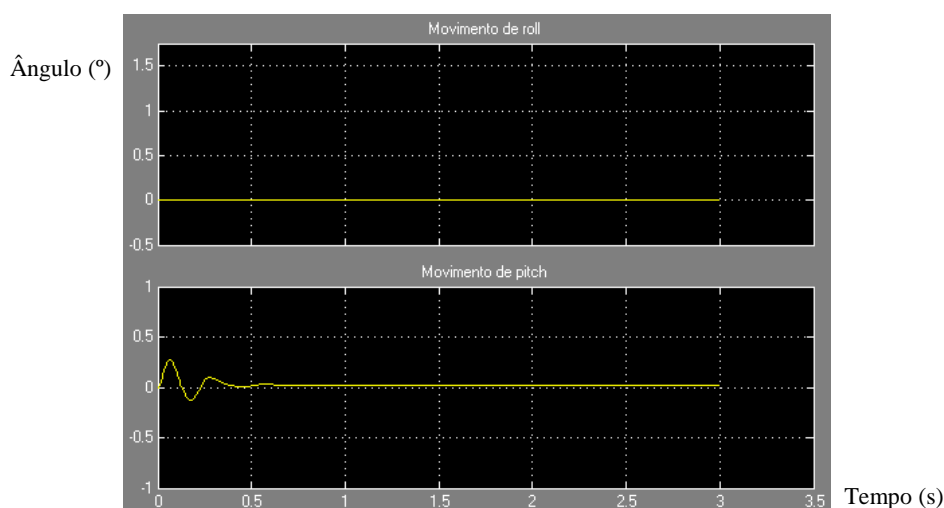


Figura 106 - Gráfico com os ângulos para as molas amarelas em todas as suspensões.

Através dos gráficos presentes na Figura 105 e na Figura 106, foi possível concluir que quanto maior a rigidez, maior será o ângulo de *pitch*; e quanto menor a rigidez, menor será o ângulo de *pitch*.

Tabela 29 – Tabela resumo com variação do ângulo de pitch com variação da rigidez da suspensão.

	Valor da rigidez (N/m)	Valor de <i>pitch</i> (°)
Rigidez total	70000	0.01
Rigidez frente	50000	0.46
Rigidez frente	90000	-0.24
Rigidez trás	50000	-0.45
Rigidez trás	90000	0.27
Rigidez total	50000	0.00
Rigidez total	90000	0.02

Quando se diminui a rigidez, a variação do ângulo é mais acentuada.

## 6.5 Influência da pressão dos pneus

Pela mesma razão anunciada no capítulo anterior (6.4 – Influência da rigidez da suspensão), apenas se analisou o ângulo de *pitch* para uma diminuição de pressão – 30 psi (Figura 107) e para um aumento de pressão – 40 psi (Figura 108).

Para simular estes casos, alteraram-se os valores de rigidez dos pneus. Estes valores foram retirados dos gráficos do anexo A e representados na Tabela 30 e na Tabela 31:

Tabela 30 - Valores utilizados para os coeficientes de rigidez dos pneus a 30 psi.

	Valores utilizados (N/m)
$k_{p1}$	97545
$k_{p2}$	97545
$k_{p3}$	109740
$k_{p4}$	109740

Tabela 31 - Valores utilizados para os coeficientes de rigidez dos pneus a 40 psi.

	Valores utilizados (N/m)
$k_{p1}$	112650
$k_{p2}$	112650
$k_{p3}$	129110
$k_{p4}$	129110

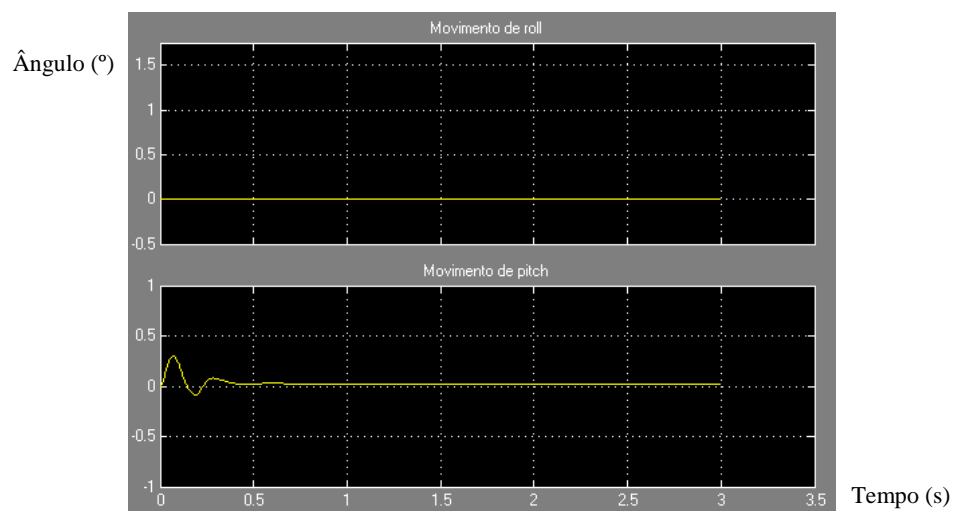


Figura 107 - Gráfico com os valores para uma pressão nos pneus de 30 psi.

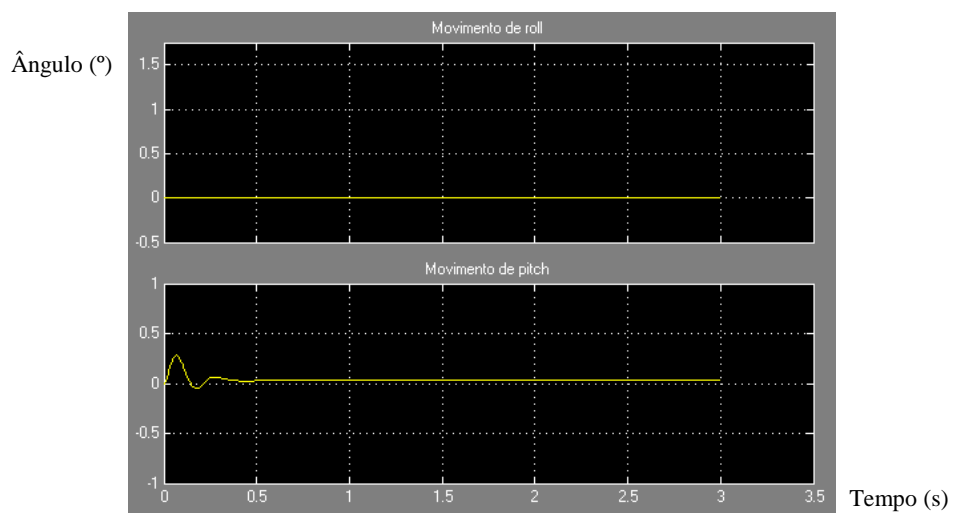


Figura 108 - Gráfico com os valores para uma pressão nos pneus de 40 psi.

Os valores das simulações efetuadas neste capítulo (Influência da pressão dos pneus) encontram-se na Tabela 32:

Tabela 32 - Tabela resumo com a variação do ângulo de pitch com a pressão.

	Valor da pressão (psi)	Valor da rigidez (N/m)	Valor de <i>pitch</i> (°)
Rigidez frente	30	97545	0.025
Rigidez trás		109740	
Rigidez frente	35	103290	0.013
Rigidez trás		114900	
Rigidez frente	40	112650	0.029
Rigidez trás		129110	

A simulação demonstrou que quer a diminuição, quer o aumento, tem o mesmo efeito que se traduz num aumento do valor do ângulo de *pitch*.

No caso da diminuição da pressão, e porque a largura dos pneus é menor à frente do que atrás, houve uma diminuição maior da rigidez à frente o que provoca um aumento do ângulo de *pitch*.

No caso do aumento da pressão, a diferença da largura dos pneus provoca um maior aumento da rigidez nos pneus traseiros, que se traduz, tal como no caso anterior, num aumento do ângulo de *pitch*.

## 6.6 Influência do amortecimento

Para verificar o efeito do amortecimento no equilíbrio dinâmico do monolugar, foram feitas 3 simulações abaixo enumeradas:

1. Valores nulos para as constantes de amortecimento dos pneus (Figura 109);
2. Valores nulos para as constantes de amortecimento da suspensão (Figura 110);
3. Valores nulos para todas constantes de amortecimento, pneus e suspensão (Figura 111).

Em cada uma das situações obtivemos seis gráficos. A título de exemplo, mencionarei apenas dois (referentes à força dianteira) para cada situação, podendo os restantes serem consultados no anexo B.

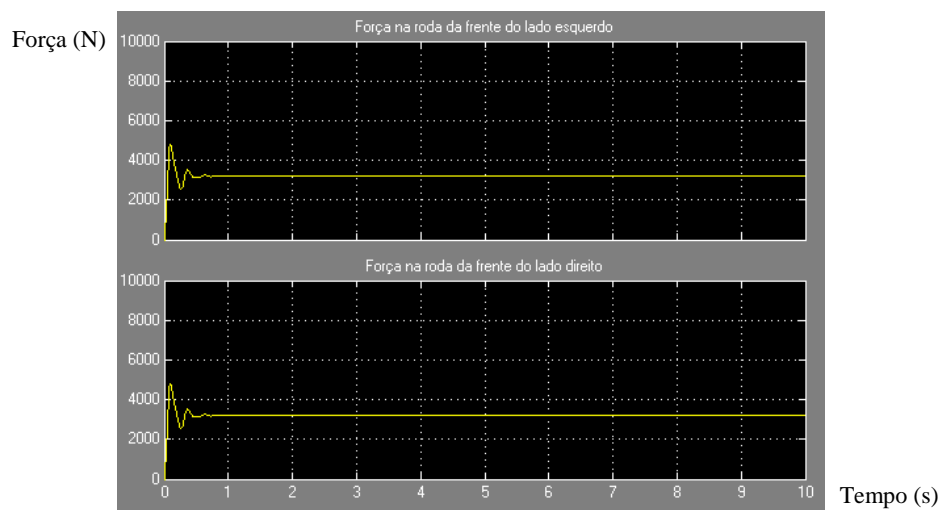


Figura 109 - Gráfico com as forças das rodas da frente sem considerar o amortecimento dos pneus.

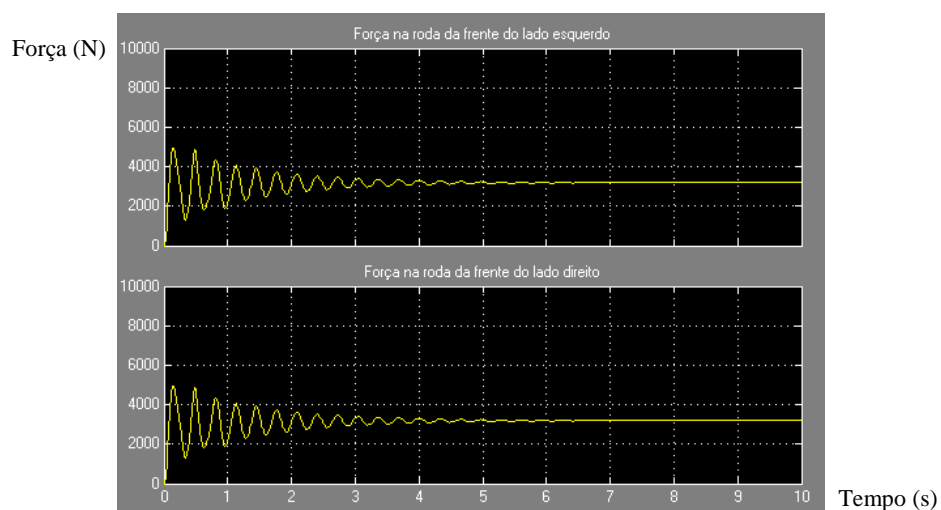


Figura 110 - Gráfico com as forças das rodas da frente sem considerar o amortecimento das suspensões.

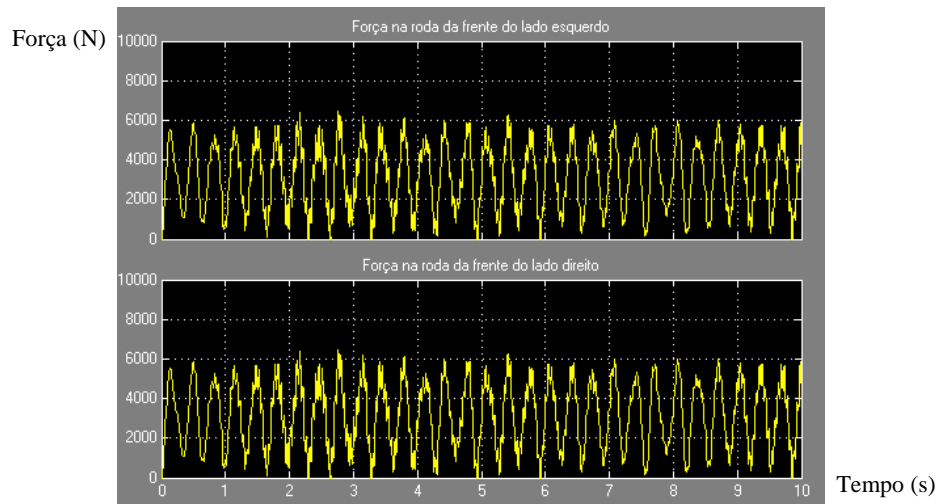


Figura 111 - Gráfico com as forças das rodas da frente sem considerar o amortecimento.

Nota: Nestes gráficos aumentou-se o tempo de simulação para ser mais nítida a influência do amortecimento.

Esta simulação demonstrou que se retirarmos o amortecimento dos pneus, a curva demora mais tempo a estabilizar. Este efeito é mais acentuado quando se retira o amortecimento da suspensão e apenas se considera o amortecimento dos pneus (uma vez que o amortecimento da suspensão é maior que o dos pneus).

Se retirarmos o amortecimento total, a curva passa a ser um movimento harmónico, não estabiliza. Como se verifica na Figura 111 a curva não tende para nenhum valor, mas a curva oscila em torno do valor calculado no capítulo 6.2 (uma vez que a massa se mantém constante, o valor da *downforce* manteve-se inalterado e não foram consideradas acelerações).

## 6.7 Influência da *downforce*

Para analisar a influência da *downforce*, considerou-se o caso de saída de curva (capítulo 6.3.4) sem *downforce*, ou seja, a aceleração lateral e a longitudinal são  $15.5 \text{ m/s}^2$  e  $-10 \text{ m/s}^2$ , respetivamente. Com estes valores, obtiveram-se os seguintes gráficos (Figura 112 à Figura 114) onde os seus valores se encontram na Tabela 33:

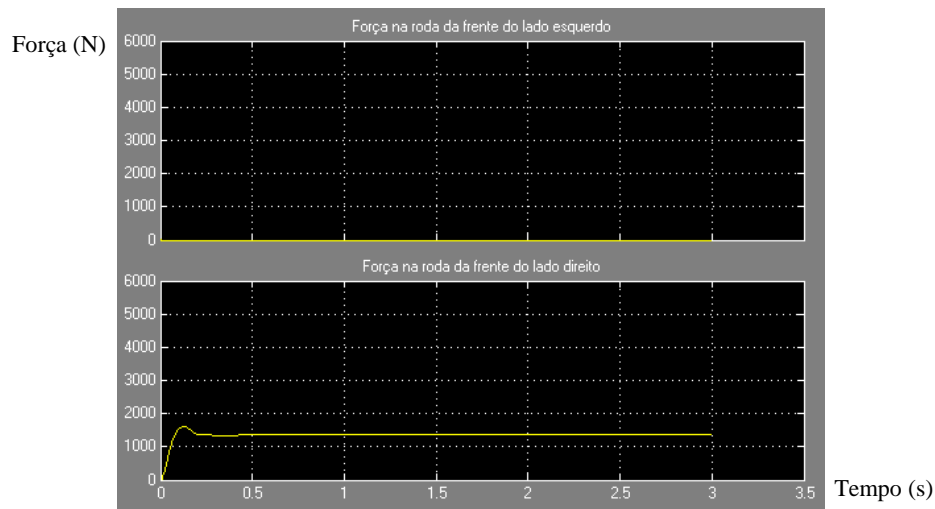


Figura 112 - Gráfico com as forças das rodas da frente para o caso de saída de curva sem *downforce*.

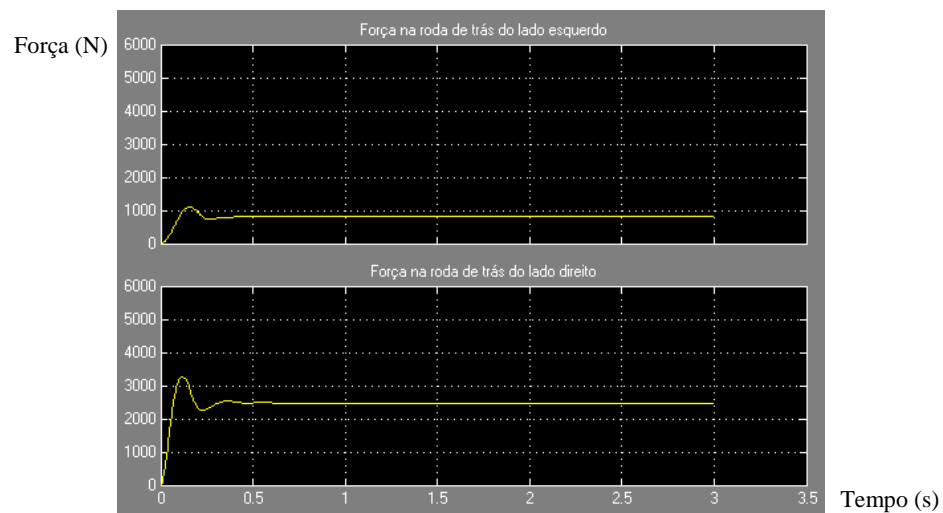


Figura 113 - Gráfico com as forças das rodas de trás para o caso de saída de curva sem *downforce*.

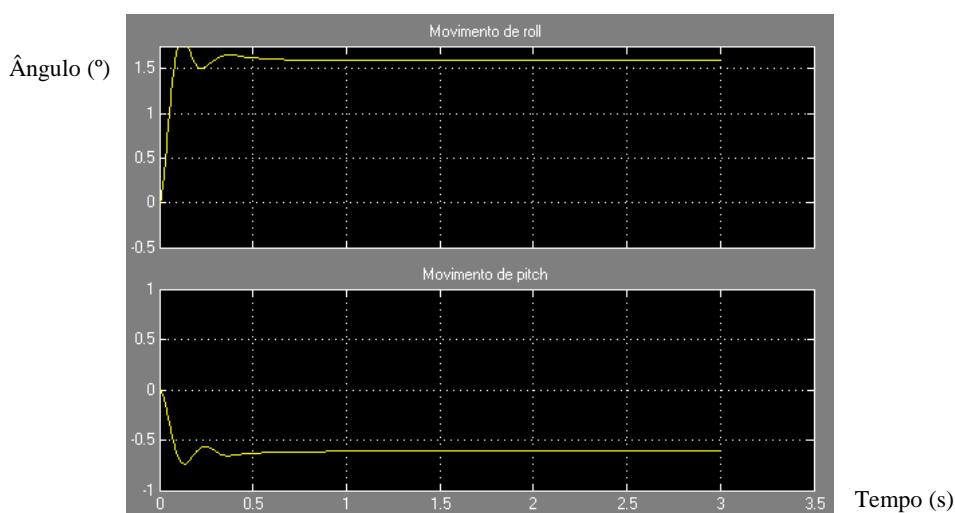


Figura 114 - Gráfico com os ângulos para o caso de saída de curva sem *downforce*.

Tabela 33 - Valores obtidas para a saída de curva sem *downforce*.

	Valores (N)
$F_{kp1}$	0
$F_{kp2}$	1376
$F_{kp3}$	833
$F_{kp4}$	2471
	Valores (°)
<i>Roll</i>	1.59
<i>Pitch</i>	-0.61

Esta simulação demonstrou a importância da *downforce*. De facto, com a ausência desta, seria impossível dar esta curva com as 4 rodas no chão. Se não fosse considerada a *downforce*, a roda 1 (frente do lado esquerdo) deixava de estar em contacto com a pista, como se pode comprovar pelo valor nulo no gráfico da Figura 112 e na Tabela 33.



## 7 Notas Finais

O objetivo deste trabalho foi a criação de um *software* capaz de analisar o comportamento dinâmico de um veículo automóvel. Para tal, foi necessária a criação de um modelo matemático que refletisse o comportamento do automóvel em diversas situações.

Para atingir este objetivo, foi necessário conjugar os conhecimentos adquiridos ao longo do meu percurso na FEUP com uma pesquisa bibliográfica intensiva, para assegurar que o modelo matemático criado traduzisse, o mais completa e fielmente possível, o comportamento do Fórmula Glória B4 disponibilizado para estudo nas várias situações simuladas.

O objetivo inicial do trabalho foi superado, na medida em que para além do programa que é universal, foram analisadas as principais variáveis que determinam o comportamento dinâmico do automóvel.

Neste trabalho começou por se fazer uma introdução à dinâmica automóvel com apoio bibliográfico, referindo os fatores que a podem influenciar com consequências para o comportamento do veículo automóvel.

De seguida, foi elaborado o modelo matemático. Dada a sua complexidade, optou-se por fazer este trabalho de uma forma faseada:

1. Criação de um modelo mais simples representativo de um quarto de carro;
2. Modelo da massa suspensa (carroçaria);
3. Dois modelos relativos à transferência de massa lateral e longitudinal;

Finalmente, combinando todos os modelos, elaborou-se o modelo final com sete graus de liberdade: movimento vertical das 4 rodas, movimento vertical da carroçaria, sua rotação lateral e longitudinal.

A implementação deste modelo num *software* de simulação foi efectuada usando a ferramenta Simulink® do MATLAB®. O método utilizado foi a criação de vários subsistemas representativos das várias parcelas constitutivas das sete equações que compõem o modelo matemático criado.

Dada a complexidade do modelo e o elevado número de variáveis susceptíveis de serem alteradas, foi criados dois subsistemas interligados entre si:

- Um subsistema que se denominou “programa” que engloba todos os subsistemas referentes ao modelo matemático;

- Outro subsistema designado “valores” que apenas serve para introdução de valores.

Esta configuração permite, por um lado uma mais fácil utilização do programa na parte de introdução de dados, e por outro, confere uma protecção acrescida, na medida em que apenas se acede ao subsistema “programa” quando se pretende efetuar alguma alteração no modelo matemático.

Para testar o programa foram efetuadas várias simulações tendo como referência um Fórmula Glória B4 disponibilizado.

Começou-se por recolher todos os valores envolvidos no modelo matemático, tendo sido necessário medir, pesar, testar e consultar o manual deste monolugar.

Com base nestes elementos efetuou-se uma simulação do equilíbrio estático para verificar a fiabilidade do modelo matemático criado. Para tal, dever-se-iam verificar as seguintes condições:

1. Somatório das forças dos pneus obtidos na simulação tem de ser igual ao peso do carro;
2. Ângulo de *roll* tinha que dar nulo, uma vez que o monolugar é simétrico em relação ao eixo longitudinal;
3. Ângulo de *pitch* negativo, uma vez que o monolugar possui mais massa na parte traseira.

Tendo sido estas condições confirmadas pelo programa, foi possível simular o comportamento do Fórmula Glória B4 nas várias situações possíveis e analisar a influência dos principais componentes no comportamento dinâmico do monolugar.

## 8 Trabalhos Futuros

Este *software* tem muitas potencialidades além das testadas nas simulações.

Por exemplo, pode-se simular o comportamento dinâmico numa curva, alterando a aceleração lateral e longitudinal ao longo do tempo e não por etapas como foi feito neste estudo. Assim, será possível analisar as transferências de massa ao longo da curva através das forças verticais em cada roda e analisar os ângulos de rotação da carroçaria.

Considerar o deslocamento vertical do pneu como *input* do programa, simulando a passagem do Fórmula Glória B4 pelos corretores.

Dada a importância dos pneus na dinâmica do automóvel, seria interessante, no futuro, acrescentar ao movimento vertical do pneu, considerado no modelo efetuado, a aderência dos pneus ao solo.

Calcular o amortecimento da suspensão e dos pneus, usando a metodologia mencionada no capítulo da obtenção de valores.

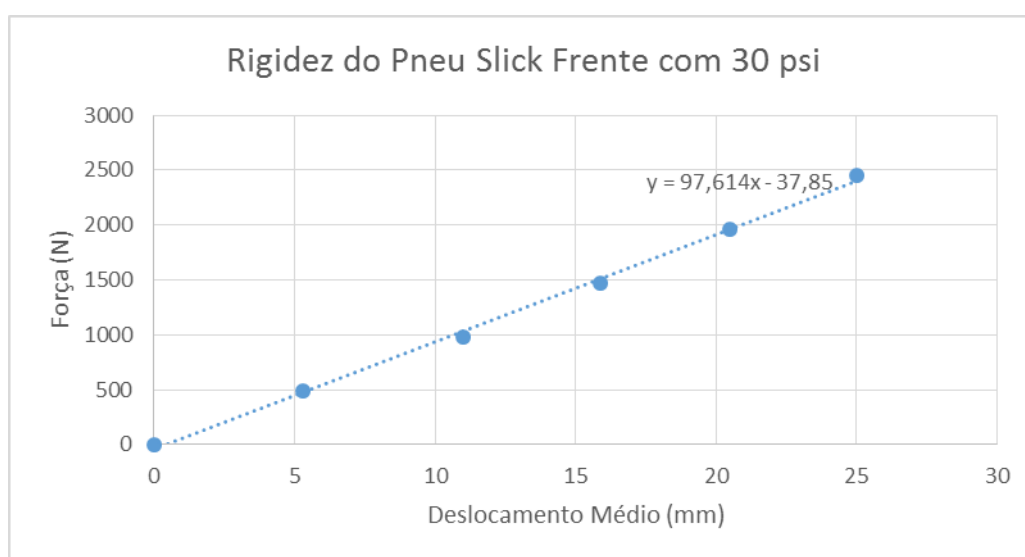
## 9 Referências e Bibliografia

- Atcp. <http://www.atcp.com.br/pt/produtos/caracterizacao-materiais/sonelastic/tecnica-excitacao-impulso.html>. acedido em: Maio de 2013
- Campbell, Colin. 1973. *Design of racing sports cars*. Editado por Chapman & Hall.
- Campbell, Colin. 1981. *Automobile Suspensions*. Editado por Chapman & Hall.
- D.Gillespie, Thomas. 1992. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Editado por Inc. Society of Automotive Engineers.
- Formula1-dictionary. <http://www.formula1-dictionary.net/>. acedido em: Abril de 2013
- Gloriacars. <http://www.gloriacars.com/default.asp?LangSito=eng>. acedido em: Março de 2013
- Gomes, J. F. Silva. 2009. *Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais*. Editado por INEGI.
- ManualGloria. <http://www.7cars.ca/PDFS/gloria-manual.pdf>. acedido em: Março de 2013
- Milliken, William F. e Douglas L. Milliken. 1995. *Race car vehicle dynamics*. Editado por Inc. Society of Automotive Engineers.
- Munson, Bruce, Donald Young e Theodore Okiishi. 1998. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. Editado por John Wiley & Sons.
- Puhn, Fred. 1976. *How to make your car handle*. Editado por H. P. Books.
- Rodrigues, José Dias. 2012. *Apontamentos de Vibrações de Sistemas Mecânicos*. Editado por FEUP.
- Simulink®. <http://www.mathworks.com/products/simulink/>. acedido em: Maio de 2013
- Smith, Carroll. 1978. *Tune to Win*. Editado por Inc. Aero Publishers.
- Wright, Peter. 2001. *Formula 1 technology*. Editado por cop. Society of Automotive Engineers.

## **ANEXO A: Resultados de Ensaios para Determinação da Rigidez dos Pneus**

**Pneus *slick* para a frente (175 mm de largura) a 30 psi e à temperatura ambiente**

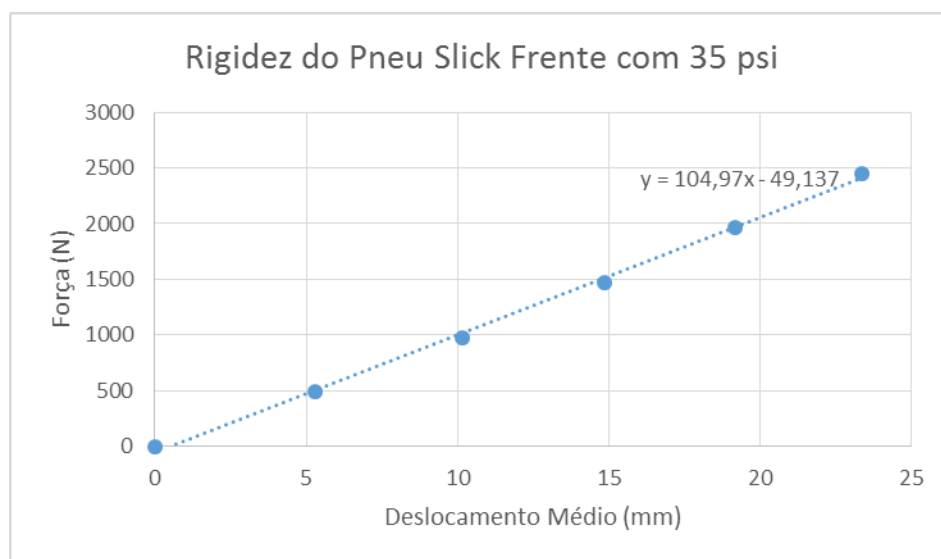
Força (N)	Deslocamentos Obtidos (mm)
0	0
490.5	5.3
981.0	11.0
1471.5	15.9
1962.0	20.5
2452.5	25.0



	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus <i>slick</i> frente 30 psi	97.614	97614

**Pneus slick para a frente (175 mm de largura) a 35 psi e  
à temperatura ambiente**

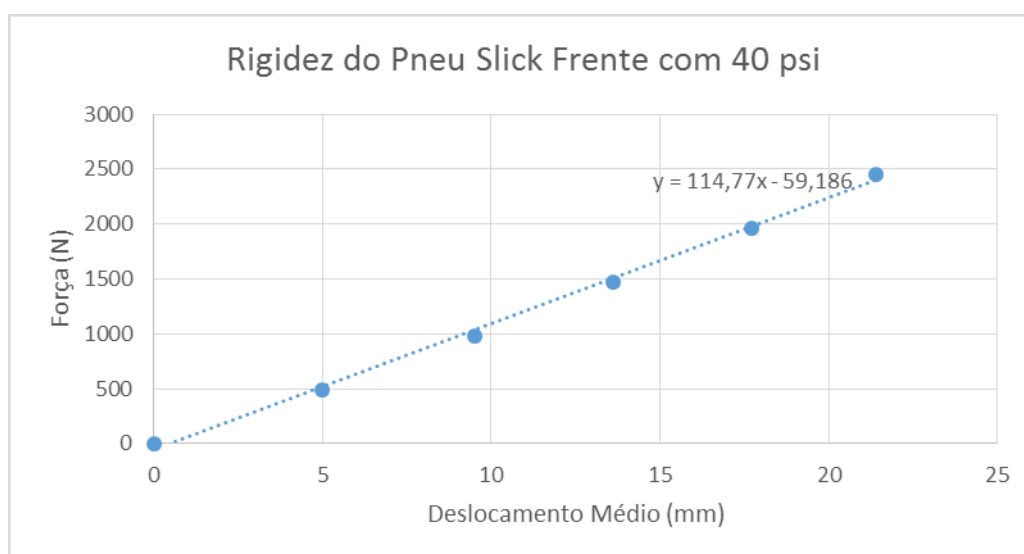
Força (N)	Deslocamentos Obtidos Pneus de Chuva Frente (mm)			
	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Média
0	0	0	0	0
490.5	5.6	4.6	5.7	5.3
981.0	10.3	9.6	10.6	10.2
1471.5	15.1	14.3	15.2	14.9
1962.0	19.4	18.7	19.5	19.2
2452.5	23.6	22.9	23.6	23.4



	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus slick frente 35 psi	104.97	104970

**Pneus slick para frente (175 mm de largura) a 40 psi e  
à temperatura ambiente**

Força (N)	Deslocamentos Obtidos (mm)
0	0
490.5	5.0
981.0	9.5
1471.5	13.6
1962.0	17.7
2452.5	21.4

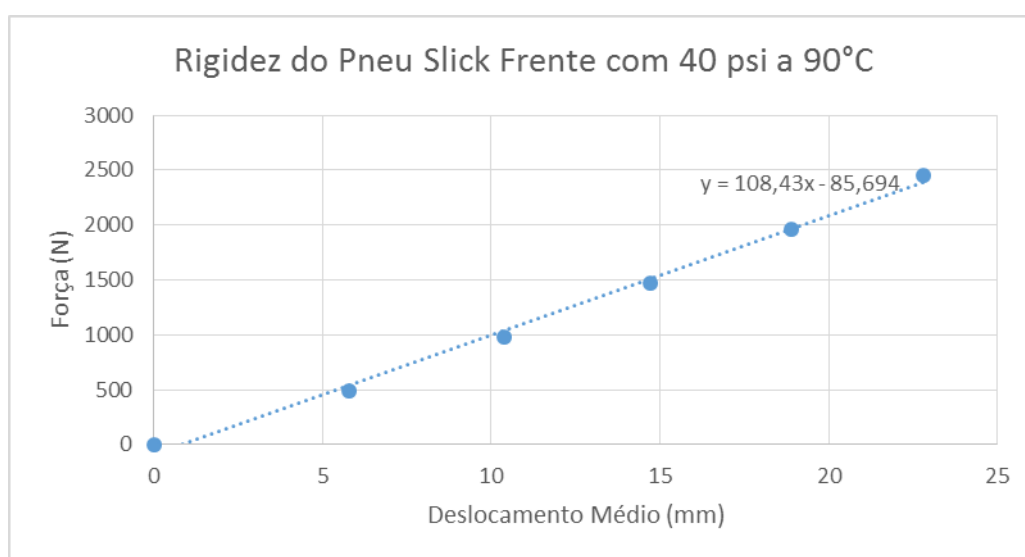


	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus slick frente 40 psi	114.77	114770



**Pneus slick para frente (175 mm de largura) a 40 psi e aquecido até 90°C**

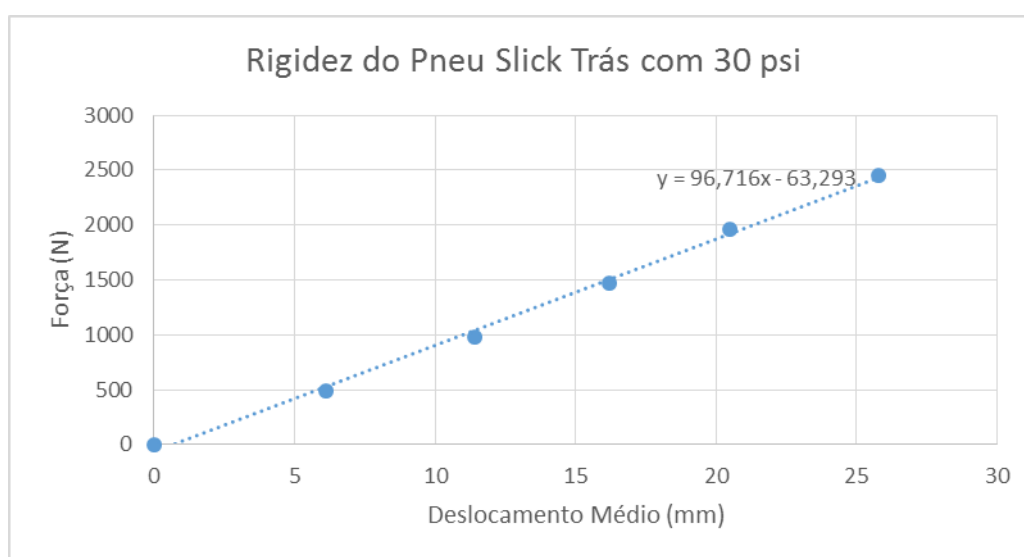
Força (N)	Deslocamentos Obtidos (mm)
0	0
490.5	5.8
981.0	10.4
1471.5	14.7
1962.0	18.9
2452.5	22.8



	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus <i>slick</i> frente 40 psi a 90°C	108.43	108430

**Pneus slick para trás (215 mm de largura) a 30 psi e  
à temperatura ambiente**

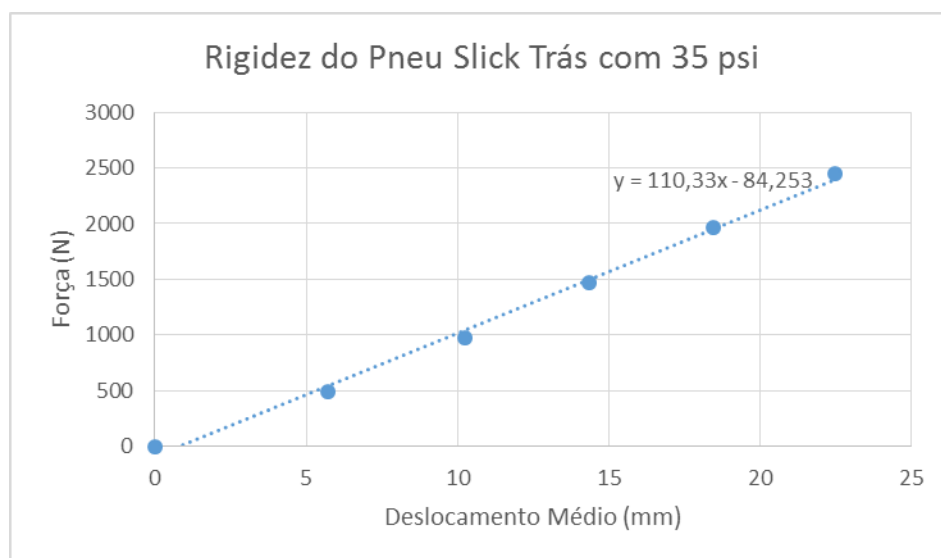
Força (N)	Deslocamentos Obtidos (mm)
0	0
490.5	6.1
981.0	11.4
1471.5	16.2
1962.0	20.5
2452.5	25.8



	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus slick atrás 30 psi	96.716	96716

**Pneus slick para trás (215 mm de largura) a 35 psi e  
à temperatura ambiente**

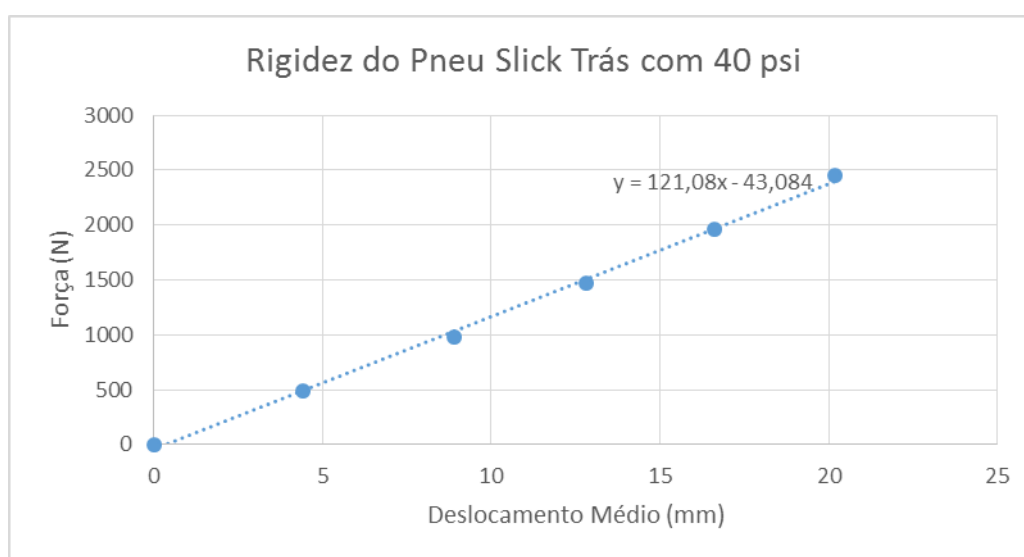
Força (N)	Deslocamentos Obtidos Pneus de Chuva Frente (mm)			
	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Média
0	0	0	0	0
490.5	5.9	5.4	5.8	5.7
981.0	10.4	9.9	10.4	10.2
1471.5	14.5	14.0	14.6	14.4
1962.0	18.6	18.1	18.7	18.5
2452.5	22.7	21.9	22.9	22.5



	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus slick atrás 35 psi	110.33	110330

**Pneus slick para trás (215 mm de largura) a 40 psi e  
à temperatura ambiente**

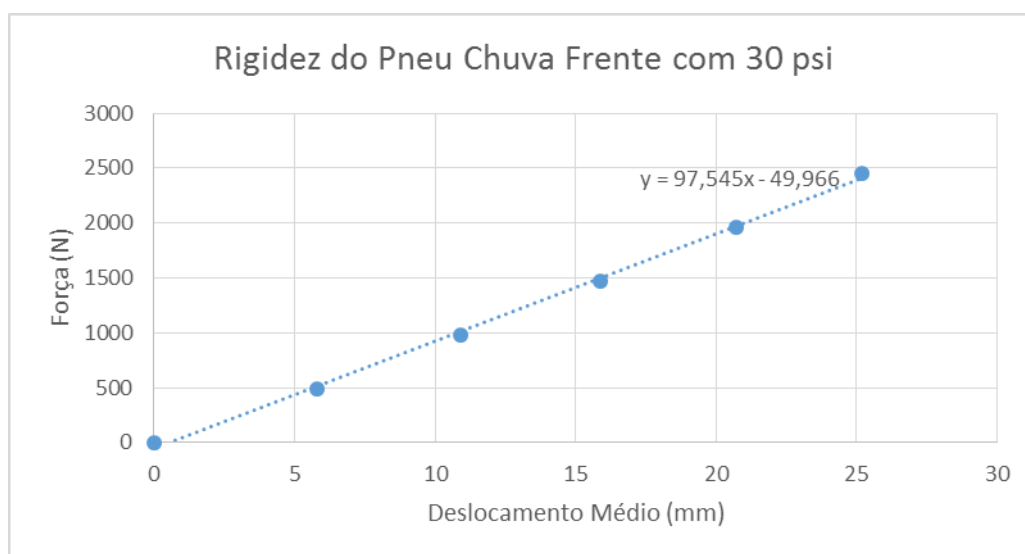
Força (N)	Deslocamentos Obtidos (mm)
0	0
490.5	4.4
981.0	8.9
1471.5	12.8
1962.0	16.6
2452.5	20.2



	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus slick atrás 40 psi	121.08	121080

**Pneus de chuva para a frente (175 mm de largura) a 30 psi e à temperatura ambiente**

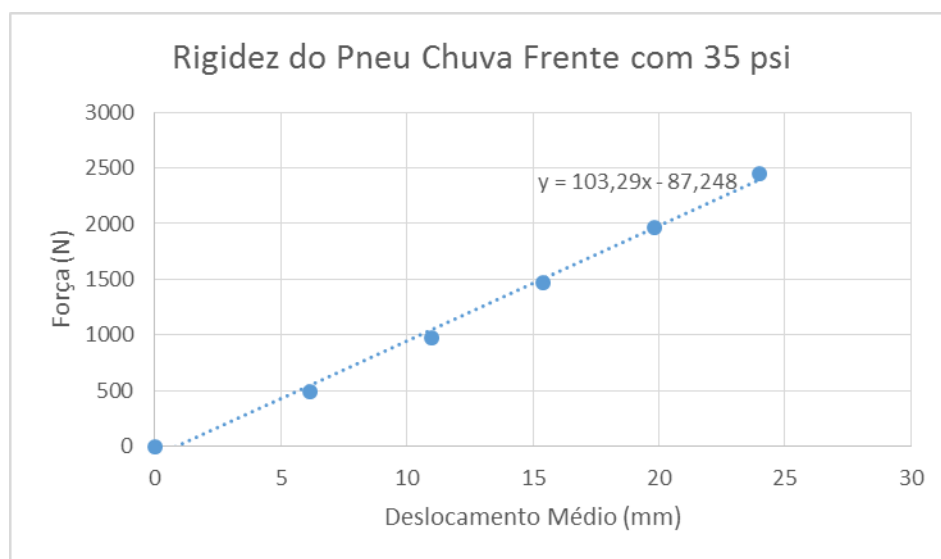
Força (N)	Deslocamentos Obtidos (mm)
0	0
490.5	5.8
981.0	10.9
1471.5	15.9
1962.0	20.7
2452.5	25.2



	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus chuva frente 30 psi	97.545	97545

**Pneus de chuva para a frente (175 mm de largura) a 35 psi e à temperatura ambiente**

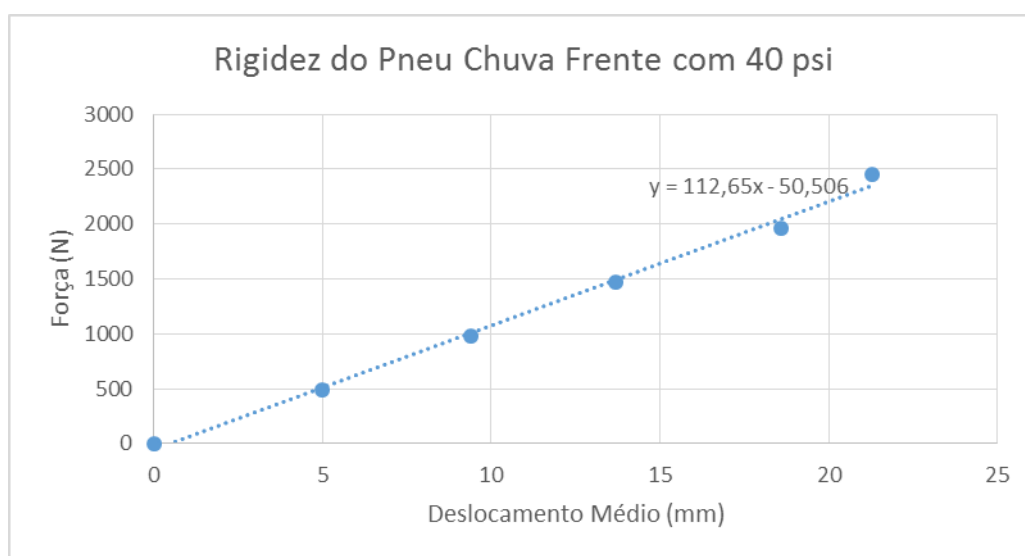
Força (N)	Deslocamentos Obtidos Pneus de Chuva Frente (mm)			
	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Média
0	0	0	0	0
490.5	6.1	6.3	6.0	6.1
981.0	11.0	11.1	10.8	11.0
1471.5	15.7	15.7	14.8	15.4
1962.0	20.0	20.0	19.4	19.8
2452.5	24.3	24.1	23.6	24.0



	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus chuva frente 35 psi	103.29	103290

**Pneus de chuva para frente (175 mm de largura) a 40 psi e à temperatura ambiente**

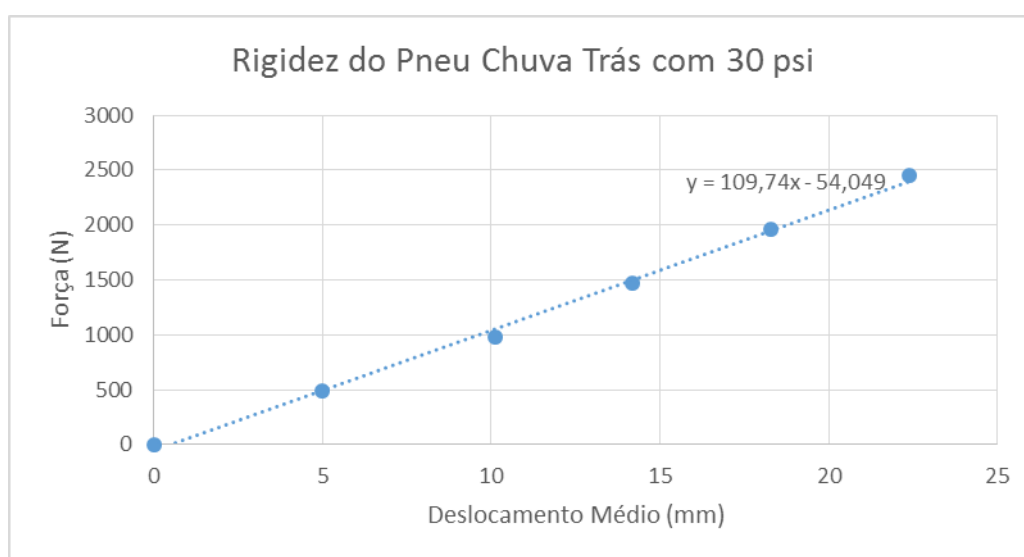
Força (N)	Deslocamentos Obtidos (mm)
0	0
490.5	5.0
981.0	9.4
1471.5	13.7
1962.0	18.6
2452.5	21.3



	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus chuva frente 40 psi	112.65	112650

**Pneus de chuva para trás (215 mm de largura) a 30 psi e à temperatura ambiente**

Força (N)	Deslocamentos Obtidos (mm)
0	0
490.5	5.0
981.0	10.1
1471.5	14.2
1962.0	18.3
2452.5	22.4

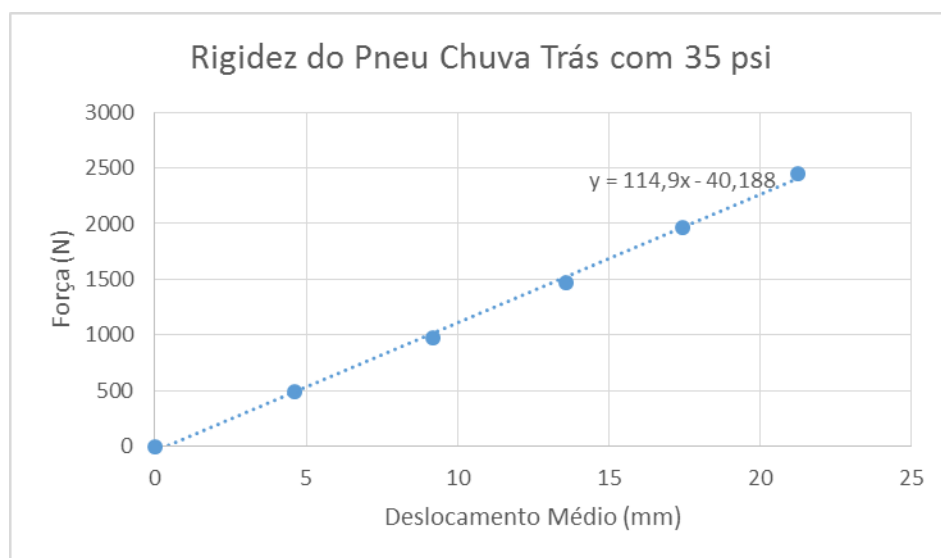


	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus chuva trás 30 psi	109.74	109740



**Pneus de chuva para trás (215 mm de largura) a 35 psi e  
à temperatura ambiente**

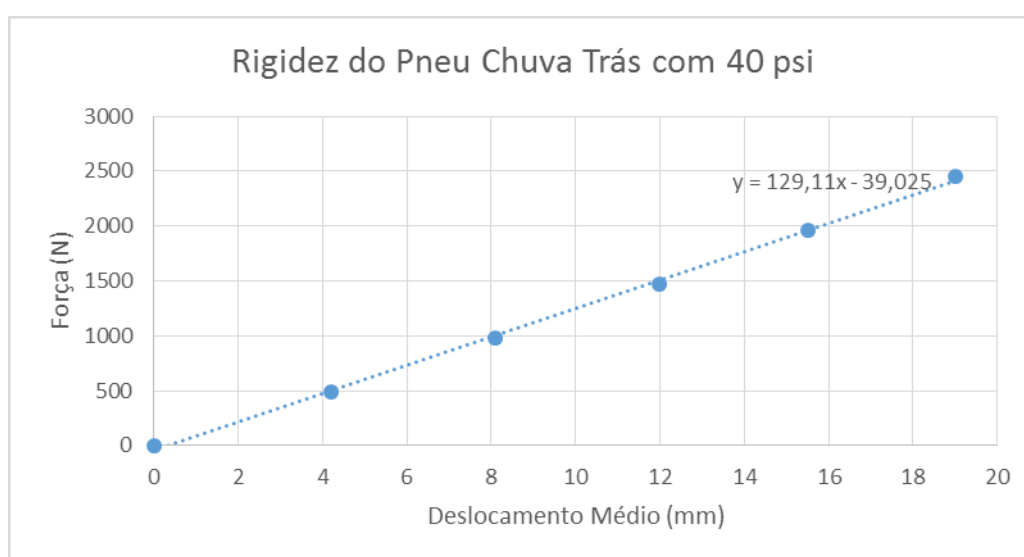
Força (N)	Deslocamentos Obtidos Pneus de Chuva Frente (mm)			
	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Média
0	0	0	0	0
490.5	4.7	4.4	4.8	4.6
981.0	9.2	8.8	9.6	9.2
1471.5	13.5	13.0	14.3	13.6
1962.0	17.6	16.9	17.8	17.4
2452.5	21.5	20.6	21.7	21.3



	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus chuva trás 35 psi	114.9	114900

**Pneus de chuva para trás (215 mm de largura) a 40 psi e à temperatura ambiente**

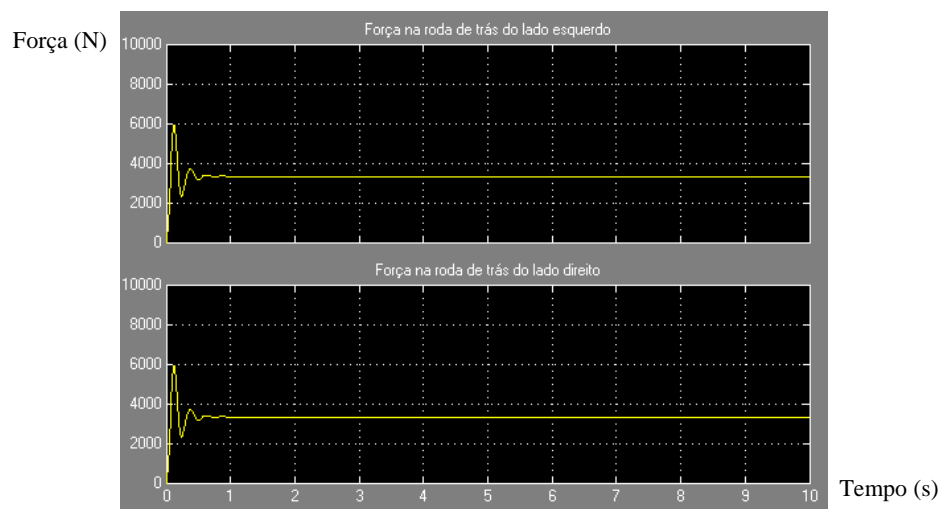
Força (N)	Deslocamentos Obtidos (mm)
0	0
490.5	4.2
981.0	8.1
1471.5	12.0
1962.0	15.5
2452.5	19.0



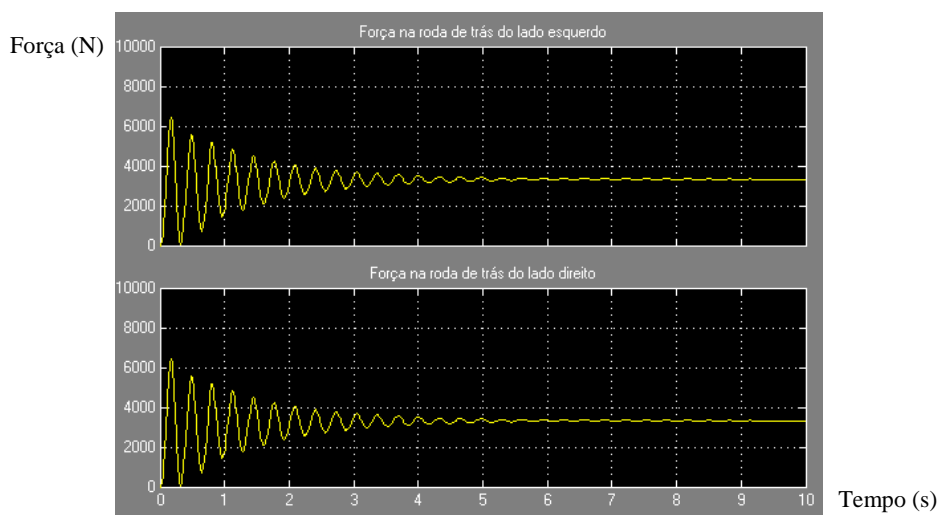
	Rigidez (N/mm)	Rigidez (N/m)
Pneus chuva trás 40 psi	129.11	129110

## **ANEXO B:      Influência do Amortecimento**

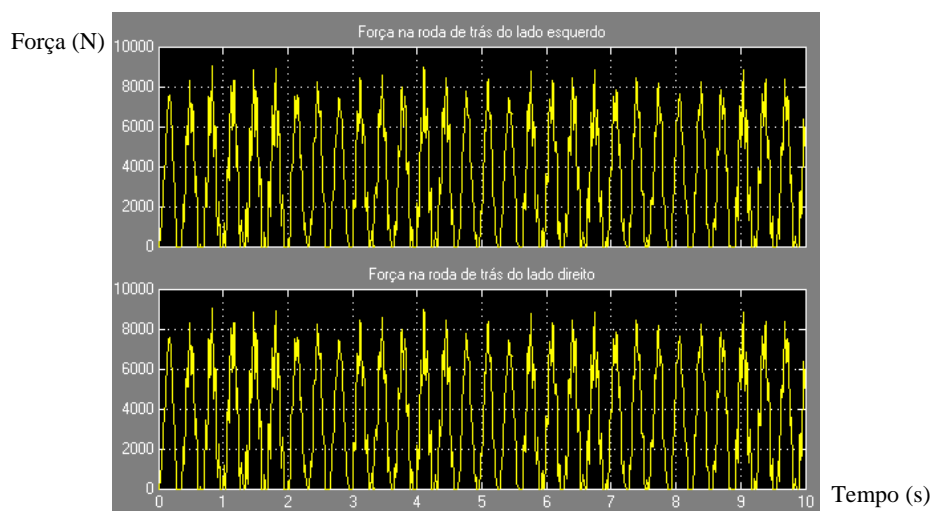
### Força nas rodas traseiras sem considerar amortecimento dos pneus



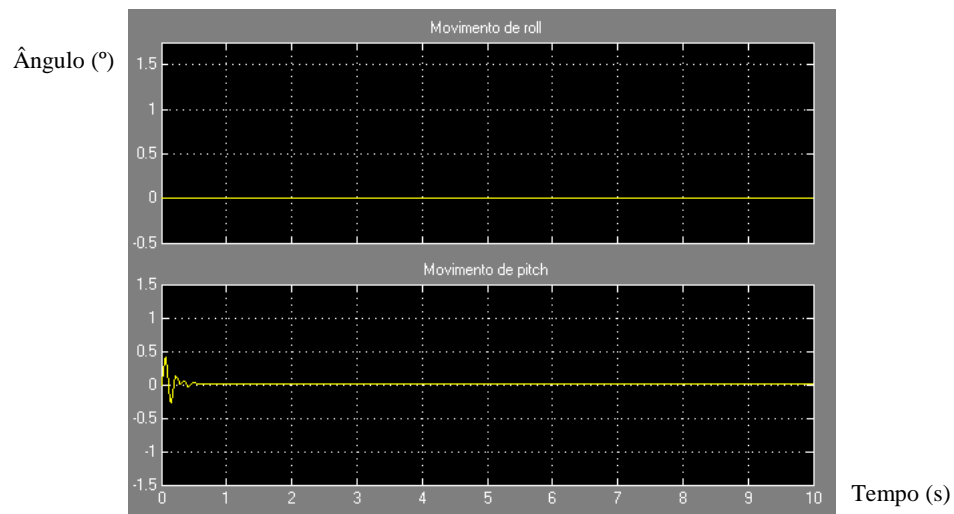
### Força nas rodas traseiras sem considerar amortecimento da suspensão



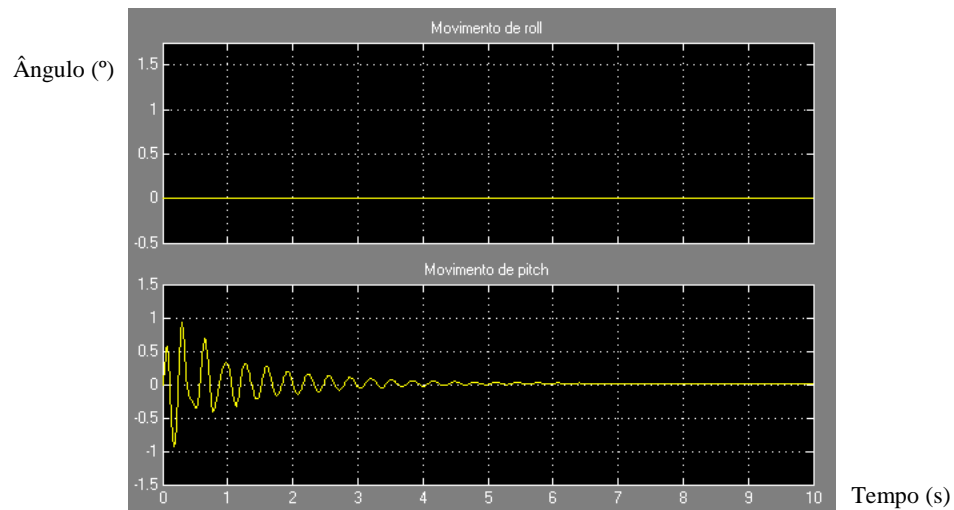
### Força nas rodas traseiras sem considerar amortecimento



### Valor dos ângulos sem considerar amortecimento dos pneus



### Valor dos ângulos sem considerar amortecimento da suspensão



### Valor dos ângulos sem considerar amortecimento

